

بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه بر اساس میانگین، واریانس، آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات

رضا راعی^۱، سعید باجلان^۲، مصطفی حبیبی^۳، علی نیک عهد^۴

چکیده: هدف این مقاله بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه است. از این‌رو معیاری جدید به نام آنتروپی معرفی می‌شود که برخلاف واریانس، وابسته به تقارن توزیع بازده دارایی‌ها نیست و می‌توان از آن به عنوان معیاری جدید برای محاسبه ریسک سبد سهام در کنار واریانس استفاده کرد. در پژوهش پیش رو مدلی بر مبنای میانگین-واریانس-آنتروپی برای حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی ارائه شده است. در این پژوهش بر اساس مدل‌های اقتصادسنجی ((ARIMA-GARCH، ریسک (واریانس) و بازده برای شرکت‌های حاضر در پرتفوی برای دوره سه ماهه بعدی پیش‌بینی شده و با ورود داده‌ها به مدل پیشنهادی و از طریق الگوریتم ازدحام ذرات (PSO) اقدام به حل مسئله بهینه‌سازی شده است. برای مقایسه مدل پژوهش با مدل میانگین-واریانس مارکوفیتز با استفاده از شاخص شارپ پرتفوی‌های محاسبه شده توسط هر کدام از روش‌ها نشان داده شده است که مدل پیشنهادی پژوهش (میانگین-واریانس-آنتروپی) با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات از کارایی بالاتری نسبت به مدل میانگین-واریانس مارکوفیتز برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، آنتروپی، روش ازدحام ذرات.

JEL: G10, G17, G19

۱. استاد، گروه مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲. استادیار، گروه مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۳. کارشناسی ارشد، حقوق مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۴. کارشناسی ارشد، مدیریت مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۰۴

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۲۲

E-mail: mostafahabibi_68@yahoo.com

نویسنده مسئول: مصطفی حبیبی

نحوه استناد به این مقاله: راعی، ر.، باجلان، س.، حبیبی، م.، و نیک‌عهد، ع. (۱۳۹۶). بهینه‌سازی پرتفوی چندهدفه بر اساس میانگین، واریانس، آنتروپی و الگوریتم ازدحام ذرات. فصلنامه مدلسازی ریسک و مهندسی مالی، ۲(۳)، ۳۶۲-۳۷۹.

مقدمه

یکی از ابعاد مهم در انتخاب پرتفوی بهینه در نظر گرفتن معیارهای مختلف ریسک در پرتفوی است. انحراف معیار به عنوان اولین معیار ریسک به کار گرفته شده در این زمینه به وسیله مارکوویتز معرفی شد (مارکوویتز، ۱۹۵۲). اما این معیار دارای کاستی‌هایی بود که پژوهشگران را بر آن داشت تا با به کار بردن معیارهای مختلف، مدل‌های انتخاب سبد سهام را توسعه دهند. یکی از معیارهای ریسک مطرح شده در این زمینه، آنتروپی است که توسط پژوهشگران برای بیان مفهوم ریسک گرفته شده است (ژانگ، لیو و ژو ۲۰۱۲).

از مزایای استفاده از آنتروپی، عدم وابستگی این معیار به تقارن تابع توزیع است به این معنی که برخلاف واریانس به دلیل عدم تقارن توزیع بازده دارایی، کارایی خود را از دست نمی‌دهد. از طرفی برخی دیگر از پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که سرمایه‌گذاران ترجیح می‌دهند که درجه بالاتری از چولگی را انتخاب کنند (برا و پارک، ۲۰۰۸). به طور کلی بیشتر پژوهش‌های انجام شده در زمینه انتخاب و تشکیل سبد سرمایه‌گذاری مبتنی بر دو فرض اولیه هستند. فرض اول نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها است و فرض دوم بر پایه همسانی واریانس‌ها بنا نهاده شده است (مارکوویتز، ۱۹۵۲). البته در این مورد در بسیاری از داده‌های سری زمانی به‌ویژه داده‌های اقتصادی ممکن است برقرار نباشد و فقط استفاده از انحراف معیار و بازده نمی‌تواند توصیف‌کننده یک پرتفوی با توزیع نامتقارن باشد (هوانگ، ۲۰۰۸).

با توجه به آنچه گفته شد در پژوهش حاضر از مدل‌های اتورگرسیو شرطی ناهمسانی واریانس (ARCH) و مدل‌های اتورگرسیو تعمیم‌یافته مشروط بر ناهمسانی واریانس (GARCH) که شروط ناهمسانی واریانس‌ها را در برازش در نظر می‌گیرند، استفاده شده است. الگوریتم ازدحام ذرات در حل مسائل چندهدفه نسبت به سایر روش‌های ترکیبی کارا تر است (یان، میائو و لی، ۲۰۰۷). از این‌رو در این پژوهش از الگوریتم ازدحام ذرات برای بهینه‌سازی استفاده شده است. ساختار مقاله بدین صورت است که پس از مقدمه، در قسمت دوم پیشینه پژوهش، در قسمت سوم روش‌شناسی پژوهش همراه با معرفی داده‌ها و روش مورد استفاده بیان می‌شود، در قسمت چهارم یافته‌های پژوهش و در قسمت پنجم نتیجه‌گیری و پیشنهادها بیان خواهد شد.

پیشینه پژوهش

ژانگ (۲۰۰۹) در پژوهش خود تخصیص دارایی چند مرحله‌ای را تحت سناریوهای بازده‌های نرمال و با ثبات تحلیل نمود. او برای حل این مسئله از برنامه‌ریزی تصادفی و قوانین تصمیم‌گیری استفاده نمود و با استفاده از مدل‌های اقتصادسنجی مانند ARMA و GARCH،

مدل‌های استخراجی خود از بازده و نوسان دارایی‌ها را به آینده تعمیم داد و مقادیر بازده و نوسان آتی را پیش‌بینی کرد و به این نتیجه رسید مدلسازی توزیع دنباله‌های پهن می‌تواند نقش بسیار موثری در تخصیص دارایی داشته باشد.

هوانگ (۲۰۰۸) به جای واریانس از آنتروپی به عنوان معیار ریسک که نسبت به تقارن تابع درجه اطمینان بی‌تفاوت است در پرتفوی فازی استفاده کرد و به وسیله الگوریتم ترکیبی هوشمند اقدام به حل آن کرد و به این نتیجه رسید که برای توزیع‌های نامتقارن یا غیر نرمال استفاده از آنتروپی می‌تواند مرز بهینه کارتری نسبت به مدل مارکوویتز ایجاد کند.

تونچان (۲۰۰۹) از سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای با سنج‌های ریسک واریانس و چولگی برای بهینه‌سازی در بازار الکتریسیته استفاده کرد. سلیکورت و ازکیسی (۲۰۰۲) سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای فازی با در نظر گرفتن نرخ قرض‌دهی و قرض‌گیری متفاوت ارائه کردند. زگو (۲۰۱۱) بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای را با الگوریتم جدیدی به نام بهینه‌سازی رانش ازدحام ذرات (DPSO) حل کرد و نشان داد عملکرد بهتری نسبت به بقیه الگوریتم‌های مورد بررسی دارد.

گوپتا (۲۰۱۲) در پژوهش خود روندی پیشنهاد کرد که تخصیص دارایی یکپارچه را بر اساس فرآیند تحلیل سلسله‌مراتبی، مدل میانگین-واریانس و برنامه‌ریزی آرمانی ممکن می‌سازد. وی سناریوهای شرایط اقتصادی آتی و مشخص ریسک سرمایه‌گذار را به عنوان عوامل موثر بر تخصیص دارایی در نظر گرفت. در این رویکرد از روش AHP به منظور در نظر گرفتن شرایط بازار و ریسک سرمایه‌گذار و وزن‌دهی آن‌ها از نظر اهمیت در فرآیند تخصیص دارایی استفاده شده و بهینه‌سازی میانگین-واریانس برای تعیین بازده بیشینه به ازای سطوح مختلف واریانس-بازده صورت گرفته است که به علت منحصر به فرد نبودن این مرز کارا، در نهایت برنامه‌ریزی آرمانی به عنوان یکپارچه‌ساز تمام فاکتورهای به هم وابسته در تصمیم‌گیری تخصیص دارایی، استفاده شده است تا هرگونه انحراف پایینی و بالایی از مقادیر نسبت‌های آرمانی که برای سه دارایی سهام، اوراق قرضه و دارایی‌های نقد که از مدل AHP به دست آمده است، کمینه نماید. در نهایت مقایسه نتایج حاصل از بازده و واریانس این پرتفو با شاخص S&P/TSX60 (به عنوان پرتفوی مرجع برای بازار کانادا) نشان داد که نسبت بازده به انحراف معیار برای پرتفوی یاد شده ۵.۵۹۷ درصد است در حالی که این مقدار برای پرتفوی بازار کانادا ۱.۰۷۰ درصد است.

پیندوریا (۲۰۱۴) مدل چند هدفه میانگین-واریانس-کشیدگی برای تخصیص سبد سرمایه‌گذاری ارائه کرد و نشان داد وقتی تابع توزیع دارایی‌ها غیرنرمال است، مدل می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای سبدهای سرمایه‌گذاری بهتری ایجاد کند. تاکانو و گوتو (۲۰۱۵) در پژوهش

خود با اشاره به اینکه بهبودسازی سبد سهام یکی از ستون‌های ریاضیات کاربردی است، به مدل‌های ریاضی بهبودسازی سبد سهام پرداخت. انتخاب پرتفوی یکی از انواع مختلف مسائل غیرخطی چندهدفه است و مدل پیشنهادی وی از کارایی بالاتری نسبت به سایر پژوهش‌ها برخوردار است.

وئی (۲۰۱۵) در پژوهش خود به منظور مدلسازی و بیان راه حل بهینه برای بهبودسازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای با الگوریتم ژنتیک، مدل بهبودسازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای احتمالی میانگین-نیم‌واریانس-ارزش در معرض خطر شرطی با در نظر گرفتن هزینه معاملات ارائه و با استفاده از الگوریتم ژنتیک مدلسازی کردند. نتایج نشان داد الگوریتم ژنتیک برای حل این دسته از مسائل مناسب و از کارایی لازم برخوردار است. موشخیان و نجفی (۱۳۹۴) به بهبودسازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات برای مدل احتمالی چند دوره‌ای میانگین-نیم‌واریانس-چولگی پرداختند. نتایج این پژوهش نیز نشان داد استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات بسیار کارتر از عدم استفاده از آن است.

لی (۲۰۱۶) به انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از مدل میانگین-چولگی-واریانس پرداخت و با استفاده از الگوریتم فازی اقدام به حل مسئله بهبودسازی کرد. نتایج این پژوهش نشان داد که مدل ارائه شده می‌تواند کارایی بیشتری نسبت به مدل مارکوویتز داشته باشد اما به دلیل عدم توجه به نامتقارن بودن بازدهی دارایی‌ها در محاسبه ریسک پرتفوی دارای نواقصی است. دارابی، وقفی، حبیب‌زاده و آهنگری (۱۳۹۵) به انتخاب پرتفوی بهینه سهام در شرکت‌های پذیرفته شده بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. هدف این پژوهش ایجاد مدلی هوشمند برای انتخاب سبد بهینه سهام با استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی مقید بهبود یافته بود.

میرزایی، خدای‌پور و پورحیدری (۱۳۹۵) کاربرد الگوریتم ژنتیک چندهدفه در بهبودسازی پرتفوی سهام با استفاده از شاخص‌های تکنیکال را بررسی کردند. این پژوهش به دنبال استفاده از این شاخص‌ها در استخراج قواعد معاملات سهام است. آن‌ها با استفاده از شاخص‌های تکنیکال و همچنین با کمک الگوریتم ژنتیک چندهدفه مدلی برای مدیریت بهینه پرتفوی ارائه کردند. به منظور ارزیابی این مدل، نتایج به دست آمده با شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران مقایسه شد و مشخص گردید که با استفاده از شاخص‌های تکنیکال می‌توان عملکرد بهتری نسبت به بازار داشت.

روش‌شناسی پژوهش

جامعه آماری پژوهش شامل شرکت‌های حاضر در بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۵ فروردین ۱۳۹۳ تا ۲۹ اسفند ۱۳۹۵ است. نمونه آماری بر اساس معیارهای زیر انتخاب می‌شود.

۱. سال مالی شرکت‌ها مختوم به اسفندماه باشد.

۲. تغییر سال مالی رخ نداده باشد.

۳. توقف معاملاتی بیش از ۳ ماه نداشته باشد.

با توجه به محدودیت‌های فوق تعداد ۹۸ شرکت به عنوان نمونه آماری انتخاب شدند و داده‌های مربوط به بازه سه ماهه هر کدام از شرکت‌ها طی سال‌های ۱۳۹۳ تا ۱۳۹۵ از نرم‌افزار ره‌آوردنویین استخراج شد. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها از نرم‌افزارهای اکسل و ایویوز و برای اجرای الگوریتم ازدحام ذرات از نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

در مدل ارائه شده در پژوهش حاضر اهداف چندگانه‌ای مد نظر است که به صورت رابطه ۱

بیان می‌شود.

$$\text{رابطه ۱)} \quad \text{Min } \lambda \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) \right]$$

Subject to, $\sum_{i=1}^n x_i u_i = R^*$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

در رابطه ۱، λ ضریبی است که مقدار آن در فاصله $[0, 1]$ تغییر می‌کند، به طوری که با قرار

دادن $\lambda=0$ کل مقدار ضریب وزنی به آنتروپی داده می‌شود و بدون توجه به ریسک، سبد سهام

دارای بیشترین بازده و کمترین آنتروپی انتخاب می‌شود و با در نظر گرفتن $\lambda=1$ کل مقدار ضریب

وزنی به ریسک داده شده و بدون توجه به آنتروپی، سبد سهام دارای کمترین ریسک و بیشترین

بازده انتخاب می‌شود. در فاصله بین صفر و یک، سبدهایی با در نظر گرفتن هر سه عامل ریسک

و آنتروپی و بازده بهینه می‌شوند. به عبارت دیگر در مدل فوق به دنبال حداقل کردن ریسک و

آنتروپی و حداکثر کردن بازده سبد سهام هستیم. در مدل فوق x_i وزن هر یک از دارایی‌های

موجود در سبد سهام و u_i بردار بازده‌های پیش‌بینی شده برای هر یک از دارایی‌های ریسکی

موجود در سبد سهام و R^* حداکثر بازدهی سبد سهام بهینه است.

تعریف شانون از آنتروپی از یک متغیر تصادفی x_i با احتمال $p(x_i)$ به عنوان احتمال وقوع،

به صورت رابطه ۲ است.

$$\text{رابطه ۲)} \quad H(x) = H(p) = \sum_x p(x) \log p(x) = E \left[\log \left\{ \frac{1}{p(x)} \right\} \right]$$

آنتروپی شانون نیز به صورت رابطه ۳، محاسبه می‌شود.

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i = -x^T (\ln x) \quad \text{رابطه ۳}$$

در معادله محاسبه آنتروپی $H(x)$ بیانگر آنتروپی شانون است و $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)T$ بیانگر بردار وزن‌های پرتفوی است.

مجموعه معادلات ترکیبی از مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم است، که برای حل دقیق این نوع مسائل الگوریتم‌های موثر و کارایی در برنامه‌ریزی ریاضی وجود ندارد. در این پژوهش با هدف تشکیل پرتفوی بهینه، به بررسی پرتفوی بهینه توسط الگوریتم ازدحام ذرات پرداخته می‌شود.

بهینه‌سازی حرکت جمعی ذرات

موجودات طبیعی گاهی به صورت یک توده رفتار می‌کنند. یکی از جریان‌های اصلی در پژوهش زندگی مصنوعی بررسی چگونگی رفتار موجودات طبیعی به صورت یک توده و پیاده‌سازی مجدد مدل توده‌ها در کامپیوتر است.

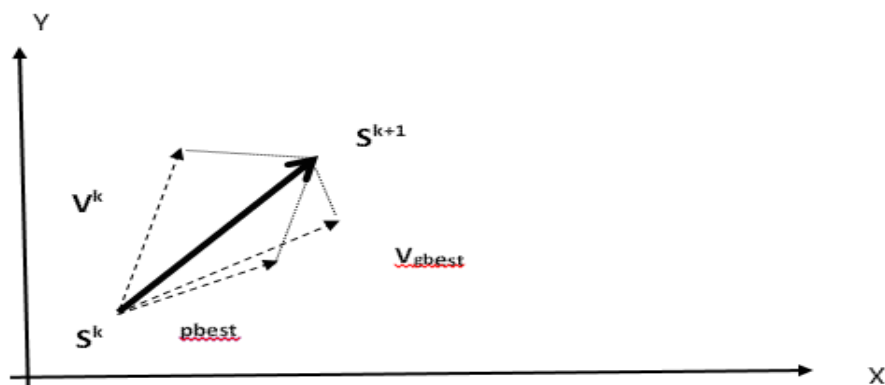
یک روش جدید بهینه‌سازی با استفاده از همانندسازی رفتار گروهی موجودات طبیعی در اوایل دهه ۱۹۹۰ ابداع شد. کندی و ابرهارت (۱۹۹۵) بهینه‌سازی ذرات انبوه (PSO) را بر اساس شبیه‌سازی از توده‌های پرندگان و دسته ماهی‌ها توسعه دادند. هر فرد تجارب قبلی خود را در PSO مبادله می‌کند. PSO برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی با متغیرهای پیوسته ایجاد شده است. علاوه بر این، برخلاف روش‌های تکاملی دیگر مانند الگوریتم ژنتیک، PSO می‌تواند با تنها یک برنامه کوچک پیاده‌سازی شود. این قابلیت PSO یکی از مزیت‌های آن در مقایسه با دیگر تکنیک‌های بهینه‌سازی است. PSO روشی مبتنی بر تکنیک‌های تصادفی است که از آن می‌توان برای پیدا کردن مینیمم سراسری (غیر قطعی) مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده کرد. کندی و ابرهارت (۱۹۹۵) PSO را از طریق شبیه‌سازی دسته پرندگان توسعه دادند. موقعیت هر عامل با s و همچنین سرعت آن با v نمایش داده می‌شود. اصلاح موقعیت عامل با استفاده از اطلاعات موقعیت و سرعت صورت می‌گیرد.

دسته پرندگان، یک تابع هدف خاص را بهینه‌سازی می‌کنند. هر عامل بهترین مقداری که تجربه کرده را (pbest) و موقعیت فعلی که در آن قرار دارد را s می‌داند. این اطلاعات قیاس از تجربیات شخصی هر عامل است. علاوه بر این، هر عامل بهترین مقداری را که تاکنون در گروه به دست آمده (gbest) می‌داند. این اطلاعات قیاس از دانشی است که چگونه عوامل دیگر اطراف آن‌ها عمل کرده‌اند. هر عامل تلاش می‌کند تا موقعیت خود را با استفاده از اطلاعات زیر تغییر دهد.

موقعیت فعلی با s ، سرعت فعلی با v ، بهترین موقعیت شخصی با $pbest$ و بهترین موقعیت گروهی با $gbest$ نشان داده می‌شود و سرعت هر عامل با استفاده از رابطه ۴، محاسبه می‌شود.

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1 rand_1 \times (pbest_i - s_i^k) + c_2 rand_2 \times (gbest - s_i^k) \quad \text{رابطه ۴}$$

در رابطه ۴، v_i^k سرعت عامل i در تکرار k ام، $pbest_i$ بهترین نقطه‌ای است که عامل i در تکرار k ام پیدا خواهد کرد و $gbest$ بهترین نقطه‌ای است که عامل i در کل تکرارها پیدا کرده است و به اصطلاح نقطه بهینه خواهد بود. طرف راست معادله دارای سه جمله است. اولین جمله سرعت قبلی عامل و جملات دوم و سوم برای تغییر سرعت عامل است. بدون جملات دوم و سوم، عامل پرواز کردن را در جهت قبلی خود ادامه خواهد داد تا به مرز برخورد کند. عامل سعی می‌کند ناحیه‌های جدید را جستجو کند و بنابراین، اولین جمله با تنوع در روند جستجو متناظر است. به عبارت دیگر، بدون جمله اول، سرعت پرواز کردن عامل تنها با استفاده از موقعیت فعلی و بهترین موقعیت آن در گذشته تعیین می‌شود. عوامل سعی خواهند کرد با $pbest$ ها و یا $gbest$ همگرا شوند. در شکل ۱، نحوه حرکت یک عامل به سمت بهترین نقطه (نقطه بهینه) نشان داده شده است.

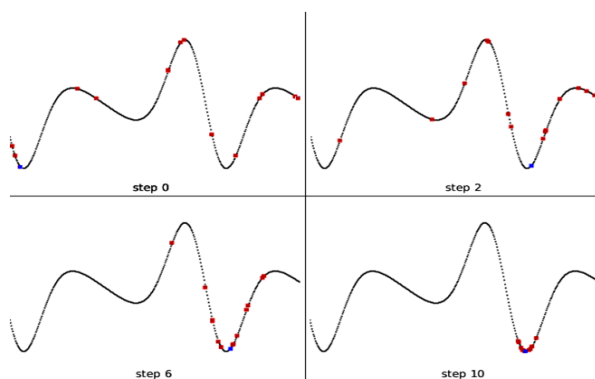


شکل ۱. نحوه حرکت یک عامل به سمت نقطه بهینه

موقعیت فعلی نقطه جستجو در فضای جواب را می‌توان با رابطه ۵ نشان داد.

$$s_i^{k+1} = s_i^k + v_i^{k+1} \quad \text{رابطه ۵}$$

هر عامل موقعیت فعلی خود را با استفاده از ترکیب بردارهای نشان داده شده در شکل ۱، اصلاح می‌کند. در واقع PSO، از چندین نقطه جستجو استفاده می‌کند و نقاط جستجو به تدریج به نقطه بهینه با استفاده از $pbest$ ها و $gbest$ نزدیک می‌شوند.



شکل ۲. جست و جو با عوامل در فضای جواب با PSO

یافته‌های پژوهش

با توجه به اینکه عملکرد مدل‌های مختلف سری زمانی، با توجه به داده‌های مختلف می‌تواند تحت تأثیر قرار گیرد، ابتدا آماره‌های توصیفی داده‌های بازدهی سه ماهه مربوط به ۳۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی ۵ فروردین ۱۳۹۳ تا ۲۹ اسفند ۱۳۹۵ در قالب جدول ۱، بررسی می‌شوند.

جدول ۱. آماره‌های توصیفی سری بازدهی‌ها طی دوره نمونه

آماره	سری بازدهی شرکت‌ها	سری بازدهی بازار
Mean	۰/۲۹۴	۰/۰۹۷
Max	۰/۵۳۸	۰/۵۴
Min	-۰/۱۱۸	-۰/۵۵۱
S.D	۰/۸۹۳	۰/۱۲۸
Skewness	۰/۳۷۶	۰/۴۰۶
Kurtosis	۰/۱۱۸۸۶	۰/۷۷۱
Jarque- Bra	۱۹۸/۰۹۵ (۰.۰۰۰۰)	۱۹۹/۰۷۳ (۰.۰۰۰۰)

با مشاهده جدول ۱، می‌توان دریافت که آزمون نرمال بودن توزیع سری یاد شده (آزمون جارک برا) بیانگر غیرنرمال بودن تابع توزیع چگالی احتمال این سری‌ها و ضرایب چولگی و کشیدگی آن به ترتیب بیانگر چوله به راست بودن و کشیدگی به نسبت بیشتر از توزیع نرمال این

سری‌ها است. برای جلوگیری از بروز رگرسیون کاذب در مدل وجود ریشه واحد در متغیر پژوهش بررسی می‌شود. برای آزمون ریشه واحد از آزمون‌های دیکی فولر افزوده (ADF)، فیلیپس پرون (PP) و KPSS استفاده می‌شود. فرض صفر در دو آزمون اول وجود ریشه واحد و نامانایی متغیر و در آزمون KPSS که قدرت بالایی در تشخیص ریشه واحد دارد، دلالت بر عدم وجود ریشه واحد و مانایی متغیر دارد. همان‌طور که در جدول ۲، ملاحظه می‌شود، مطابق نتایج حاصل از آزمون‌های ریشه واحد دیکی فولر افزوده (ADF) و فیلیپس پرون (PP) شاخص بازدهی شرکت و بازار به دلیل اینکه سطح معناداری گزارش شده برای آن‌ها کمتر از ۰/۰۵ است در سطح معناداری ۹۵ درصد، فرضیه صفر مبنی بر وجود ریشه واحد در این متغیرها رد شده و این متغیرها در سطح مانا هستند.

جدول ۲. آماره‌های آزمون ریشه واحد، خودهمبستگی و واریانس ناهمسانی سری متغیرها در دوره نمونه

آماره	سری بازدهی روزانه شرکت	سری بازدهی روزانه بازار
ADF	۵۲۲۱/۸۲(۰/۰۰۰)	۳۶۳۰/۸۰(۰/۰۰۰)
Phillips-Perron	۷۹۰۱/۷۲(۰/۰۰۰)	۷۹۰۷/۵۳(۰/۰۰۰)
Box- Ljung Q(10)	۴۸۸/۲۴(۰/۰۰۰)	۸۶۴۳/۴۱(۰/۰۰۰)
McLeod-Li Q ² (10)	۲۵۴/۲۱(۰/۰۰۰)	۸۹/۵۵(۰/۰۰۰)
ARCH (10)	۱۵/۳۲(۰/۰۰۰)	۱۲/۱۸(۰/۰۰۰)

با توجه به جدول ۲، می‌توان دریافت که آماره لیانگ-باکس (با ده دوره وقفه) برای بازدهی‌ها، ضمن رد فرضیه صفر این آزمون مبنی بر عدم وجود خودهمبستگی سریالی میان جملات سری، بالا بودن مقدار این آماره، وجود خودهمبستگی میان وقفه‌های مختلف این سری را نشان می‌دهد. همچنین، آماره مک‌لئود-لی فرضیه صفر (مبنی بر عدم وجود خودهمبستگی سریالی میان مجذور بازده سری) را رد نموده، که در واقع بیانگر وجود اثرات غیرخطی در این سری و نیز مؤید واریانس ناهمسان بودن آن، است. گفتنی است که نتایج آزمون آرچ انگل (آزمون وجود اثرات ARCH) نیز با نتایج آزمون مک‌لئود-لی سازگار بوده و فرضیه واریانس ناهمسان بودن سری بازدهی‌ها را تایید می‌کند.

برای مدلسازی بازدهی دارایی‌ها با توجه به مانا بودن سری بازدهی شرکت‌ها به کمک روش باکس-جنکینز، بهترین مدل از خانواده مدل‌های ARMA(p,q) برای توضیح رفتار گشتاور مرتبه اول سری فوق (معادله میانگین) برآورد خواهد شد. در جدول ۳، بهترین مدل‌های خانواده ARMA با کمک معیارهای آکائیک و شوارتز برآورد شده‌اند.

جدول ۳. انواع مختلف مدل‌های ARMA برای سری بازدهی سهام

AIC	SBC	معیار / مدل
-۱۲/۴۵	-۱۱/۴۱	ARMA(1,1)
-۱۲/۴۶	-۱۱/۴۳	ARMA(1,2)
-۱۲/۴۳	-۱۱/۴۲	ARMA(2,2)

بر اساس جدول ۳، به سادگی می‌توان دریافت که مدل ARMA(1,2) در بین مدل‌های یاد شده دارای ایده‌آل‌ترین شرایط است، زیرا از کمترین مقدار معیارهای اطلاعات (آکائیک و شوارتز) برخوردار است. فرم تصریحی آن به صورت رابطه ۶، نشان داده می‌شود.
(رابطه ۶)

$$RET = 0.0008 - 0.035AR(1) + 0.153MA(1) - 0.185MA(2)$$

$$t: (2.11) \quad (-3.24) \quad (2.35) \quad (-21.92)$$

$$R^2 : 0.45$$

$$F - Statistic : 54.65(0.000)$$

$$DW : 1.89 \quad Log - Likelihood : 453.34$$

با توجه به وجود واریانس ناهمسانی در سری یاد شده، برای برآورد معادله میانگینی مناسب که در آن معناداری ضرایب دارای ابهام نباشد (یا به منظور اینکه آماره‌های F ، t و .. معناداری خود را از دست ندهند) و با عنایت به اینکه در این روش خطای معیار به فرم صحیحی تخمین زده می‌شود، از برآوردگرهای سازگار وایت^۱ استفاده شده است.

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، سری مربوط به بازدهی‌ها، دارای واریانس ناهمسانی شرطی بوده که بر این اساس ترکیب خانواده مدل‌های GARCH با معادله میانگین ARMA(1,2) بهترین نتایج را برای برآورد واریانس دارایی‌ها در بر داشته‌اند. بنابراین، جدول ۴، نتایج حاصل از برآورد بهترین مدل‌های ممکن را نشان می‌دهد.

جدول ۴. انواع مدل‌های خانواده GARCH با معادله میانگین ARIMA(1,2)

ARIMA(1,2)		انواع مدل‌ها
آماره شوارتز	آماره آکائیک	
۱۹/۸۷	۱۸/۷۶	GARCH
۱۷/۲۱	۱۶/۰۹۸	EGARCH
۲۰/۶۴	۱۹/۰۷۳	GJR-GARCH
۱۹/۸۷	۱۸/۳۶	APGARCH
۲۱/۵۹	۲۰/۸۷	IGARCH

بهترین مدل، در مقایسه با سایر مدل‌های ممکن و مناسب، مدل EGARCH است. همچنین بررسی آماره دوربین واتسون و آزمون LM در همه مدل‌های فوق نشان داد که هیچگونه خودهمبستگی در اجزاء اخلال آن‌ها وجود ندارد. همچنین، انجام آزمون Q، لیانگ-باکس و آزمون مک‌لئود-لی بر روی پسماندهای این مدل‌ها، نیز وجود خودهمبستگی میان اجزاء اخلال و مجذور آن‌ها را منتفی اعلام نمودند. از این‌رو، این نتایج به خوبی بیانگر قابل اتکا بودن مدل‌های برآورد شده است.

جدول ۵، نشان‌دهنده تصریح نهایی مدل EGARCH با معادله میانگین ARIMA(1,2) است.

جدول ۵. برآورد مدل EGARCH برای بازدهی قیمت سهام

معادله میانگین		
متغیرها	ضریب	سطح معناداری
عرض از مبدا	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰
AR(1)	-۰/۰۳۵	۰/۰۰۷
MA(1)	۰/۱۵۳	۰/۰۰۵
MA(2)	-۰/۱۸۵	۰/۰۰۱
معادله واریانس		
عرض از مبدا	-۰/۱۸۸	۰/۰۰۰
ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)))	۰/۳۷۵	۰/۰۰۰
RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))	۰/۰۱۷۸	۰/۰۰۰
LOG(GARCH(-1))	۰/۹۳۴	۰/۰۰۰
آماره‌های خوبی برازش	ضریب تعیین آماره دوربین واتسون	۰/۰۶۸۵ ۱/۹۳

در رابطه ۷، مدل‌های ARMA(1,2) و EGARCH با توجه به معناداری ضرایب در جدول ۵، برای برآورد بازده و واریانس مورد نظر به کار برده شده‌اند.

$$RET_t = 0.0008 - 0.035AR(1) + 0.153MA(1) - 0.185MA(2) \quad (\text{رابطه ۷})$$

$$z: \quad (4.45) \quad (-2.95) \quad (2.50) \quad (-3.12)$$

$$h_t = -0.18 + 0.37 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + 0.07 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + 0.93 \log h_{t-1}$$

$$z: (-26.39) \quad (19.39) \quad (4.89) \quad (254.12)$$

بهبودسازی پرتفوی چندهدفه براساس میانگین، ... ۳۷۳

همان طور که بر اساس آماره t ضرایب رابطه γ مشخص است، عمده ضرایب معنادار هستند. همچنین با توجه به نتایج آزمون ARCH مشاهده شد که مشکل واریانس ناهمسانی نیز در جملات اخلاص مدل رگرسیونی برطرف شده است. بر اساس نتایج به دست آمده مشاهده شد به دلیل اینکه مقدار Prob گزارش، در تمامی مدل های برآورد شده بالاتر از 0.05 است در سطح اطمینان 95 درصد فرضیه صفر مبنی بر عدم وجود واریانس ناهمسانی رد نمی شود.

جدول ۶. مقادیر پیش بینی شده بازده و انحراف معیار دارایی ها طی پنج دوره

مقادیر پیش بینی شده سری زمانی بازده سهام شرکتها		دوره زمانی
انحراف معیار	بازده	
۰/۰۸۹	۰/۰۹۳	۱۳۹۳/۰۷/۲۴
۰/۰۶۷	۰/۰۷۸	۱۳۹۳/۱۱/۱۴
۰/۰۸۷	۰/۱۲۰	۱۳۹۴/۰۳/۲۳
۰/۰۹۷	۰/۰۸۹	۱۳۹۴/۰۸/۱۵
۰/۰۱۰	۰/۰۹۲	۱۳۹۴/۱۲/۱۲
۰/۰۶۹	۰/۱۱۲	۱۳۹۵/۰۲/۱۸
۰/۰۹۵	۰/۰۱۳	۱۳۹۵/۰۶/۲۱
۰/۰۸۸	۰/۰۷۵	۱۳۹۵/۱۰/۱۰

در جدول ۷، مقادیر بازده، انحراف معیار و آنتروپی بازده هر یک از دارایی ها در طی دوره زمانی مورد نظر آورده شده است.

جدول ۷. مقادیر آنتروپی بازده و انحراف معیار دارایی ها طی پنج دوره

سری زمانی بازده بازار			سری زمانی بازده سهام شرکتها			دوره زمانی
آنتروپی	انحراف معیار	بازده	آنتروپی	انحراف معیار	بازده	
۰/۵۰۹	۰/۰۸۹	۰/۰۹۳	۰/۰۵۶	۰/۰۱۲	۰/۰۷۱	۱۳۹۳/۰۷/۲۴
۰/۴۲۱	۰/۰۷۱	۰/۰۵۷	۰/۴۸۲	۰/۰۶۷	۰/۰۷۸	۱۳۹۳/۱۱/۱۴
۰/۵۰۹	۰/۰۸۷	۰/۱۰۴	۰/۵۲۱	۰/۰۸۷	۰/۱۲۰	۱۳۹۴/۰۳/۲۳
۰/۵۱۲	۰/۰۷۹	۰/۰۷۳	۰/۵۳۷	۰/۰۹۷	۰/۰۸۹	۱۳۹۴/۰۸/۱۵
۰/۵۸۷	۰/۰۶۹	۰/۰۸۱	۰/۶۰۱	۰/۰۱۰	۰/۰۹۲	۱۳۹۴/۱۲/۱۲
۰/۶۱۸	۰/۰۸۵	۰/۰۹۵	۰/۶۵۹	۰/۰۶۹	۰/۱۱۲	۱۳۹۵/۰۲/۱۸
۰/۶۸۷	۰/۰۹۹	۰/۰۹	۰/۰۷۸۳	۰/۰۹۵	۰/۰۱۳	۱۳۹۵/۰۶/۲۱
۰/۷۳۵	۰/۰۹۳۳	۰/۰۶۷	۰/۸۵۳	۰/۰۸۸	۰/۰۷۹	۱۳۹۵/۱۰/۱۰

در جدول ۷، مشاهده می‌شود مقدار شاخص بازدهی سهام مبتنی بر بازدهی، انحراف معیار (ریسک) و آنتروپی در طول زمان صعودی بوده و نسبت به شاخص‌های بازار بزرگتر است. همان‌طور که مطرح شد یکی از دلایل این امر عدم تقارن در بازده دارایی‌ها و عدم کارایی واریانس در مدل کردن ریسک در این شرایط است. بنابراین در نظر گرفتن معیار دیگری مانند آنتروپی که نسبت به عدم تقارن و غیرنرمال بودن بازده دارایی‌ها است می‌تواند در مدل انتخاب سبد سهام مفید واقع شود.

به منظور اطمینان از کارایی و عملکرد بهتر رویکرد یکپارچه‌ای که در این پژوهش ارائه شده است، وزن‌های بهینه حاصل از تخصیص دارایی مدل مارکویتز را محاسبه کرده و با وزن‌های رویکرد پیشنهادی در جدول ۸، مقایسه شده است. مدل مارکویتز با داشتن بازده مورد انتظار، انحراف معیار و همبستگی بین دارایی‌های مختلف که مقادیر پیش‌بینی شده آن‌ها بیشتر محاسبه شده است، مشخص می‌سازد که در هر یک از گروه‌های دارایی چه مقدار باید سرمایه‌گذاری شود.

جدول ۸. مقادیر وزن‌های به‌دست آمده از رویکرد مدل مارکویتز و و آنتروپی شانون

وزن حاصل از رویکرد آنتروپی شانون		وزن حاصل از رویکرد مارکویتز		دوره زمانی
۰/۷۰۹	۰/۲۹۱	۰/۶۱۸	۰/۳۸۲	۱۳۹۳/۰۷/۲۴
۰/۸۲۵	۰/۱۷۵	۰/۵۳۸	۰/۴۶۲	۱۳۹۳/۱۱/۱۴
۰/۶۷۱	۰/۳۲۹	۰/۷۱۷	۰/۲۸۳	۱۳۹۴/۰۳/۲۳
۰/۷۹۰	۰/۲۱۰	۰/۴۰۲	۰/۵۹۸	۱۳۹۴/۰۸/۱۵
۰/۸۸۲	۰/۱۱۸	۰/۴۳۶	۰/۵۶۴	۱۳۹۴/۱۲/۱۲
۰/۶۱۶	۰/۳۸۴	۰/۶۱۱	۰/۳۸۹	۱۳۹۵/۰۲/۱۸
۰/۵۱۸	۰/۴۸۲	۰/۳۱۱	۰/۶۸۹	۱۳۹۵/۰۶/۲۱
۰/۶۷۱	۰/۳۲۹	۰/۸۱۸	۰/۱۸۲	۱۳۹۵/۱۰/۱۰

در ادامه به منظور ارزیابی وزن‌های بهینه‌ای که از رویکرد پیشنهادی این پژوهش به دست آمده است، با استفاده از رویکرد پس‌آزمایی بر اساس اطلاعات واقعی محقق شده، به مقایسه زوجی شاخص شارپ برای ارزیابی نتایج این رویکرد و مدل مارکویتز پرداخته می‌شود.

جدول ۹. بازده و انحراف معیار محقق شده مدل مارکویتز و و آنتروپی شانون

نتایج حاصل از رویکرد آنتروپی شانون			نتایج حاصل از رویکرد مارکویتز			دوره زمانی
معیار شارپ	انحراف معیار	بازده	معیار شارپ	انحراف معیار	بازده	
۱/۳۳۹	۰/۰۸	۰/۰۹	۱/۳۹۴	۰/۰۷۹	۰/۰۸	۱۳۹۳/۰۷/۲۴
۱/۷۳۸	۰/۱۱	۰/۱۰	۱/۳۴۲	۰/۱۱۹	۰/۱۱	۱۳۹۳/۱۱/۱۴
۲/۴۶۵	۰/۰۹	۰/۰۹	۱/۳۹۴	۰/۱۰۹	۰/۰۹	۱۳۹۴/۰۳/۲۳
۱/۸۹۶	۰/۰۹	۰/۰۹	۱/۷۳۶	۰/۰۹۵	۰/۰۸	۱۳۹۴/۰۸/۱۵
۰/۹۲۸	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۸۹۳	۰/۱۲۳	۰/۱	۱۳۹۴/۱۲/۱۲
۱/۶۷۳	۰/۱۱	۰/۱۲	۱/۴۸۷	۰/۰۸۵	۰/۰۹	۱۳۹۵/۰۲/۱۸
۲/۱۲۰	۰/۰۹	۰/۰۹	۲/۱۰۹	۰/۰۶۹	۰/۰۸	۱۳۹۵/۰۶/۲۱
۱/۹۸۳	۰/۰۸	۰/۰۹	۱/۸۷۳	۰/۰۷۰	۰/۰۸	۱۳۹۵/۱۰/۱۰

بر اساس نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی در پژوهش نسبت به مدل مارکویتز در تعیین وزن بهینه برتری داشته است. همچنین مشاهده می‌شود که شاخص شارپ پرتفوی رویکرد پیشنهادی از شاخص شارپ پرتفوی مارکویتز بیشتر است.

در بهینه‌سازی چندهدفه، به منظور مقایسه پاسخ‌ها از لحاظ گستردگی و همگرایی نتایج از دو معیار استفاده می‌شود. برای تعیین میزان همگرایی پاسخ‌ها، معیار فاصله نسلی معکوس به کار برده می‌شود. فرض کنید P^* مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته روی بهینه پرتو و تخمینی از مرز کارایی است. این فاصله در رابطه ۸، نمایش داده شده است.

$$\text{IGD}(P^*, P) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, P)}{|P^*|} \quad (\text{رابطه ۸})$$

در رابطه ۸، $d(v, P)$ کمترین فاصله اقلیدسی بین v و نقاط P است، اگر $|P^*|$ به اندازه کافی بزرگ باشد که بتواند بهینه پارتو را به خوبی تخمین بزند، IGD می‌تواند بیانگر هر دو معیار تنوع و همگرایی در سبب دارایی باشد. برای داشتن آنتروپی پایین باید P هر چه بیشتر به نقاط بهینه پارتو نزدیک باشد و علاوه بر این، نباید بخش‌هایی از کل نقاط بهینه را از دست داده باشد. با توجه به نقاط بهینه پارتو در سرمایه‌گذاری سبب دارایی با استفاده از الگوریتم PSO نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که معیار IGD در نقطه بهینه نزدیک به ۰.۰۴۸۳ خواهد بود که بسیار عدد ناچیزی است.

نتایج به دست آمده بیانگر این موضوع است که برای دستیابی به بهینه پارتو در سبب دارایی دارایی همگرایی به نسبت مناسبی است.

نتایج حاصل از وزن اختصاص یافته برای ۲۵ شرکت تشکیل دهنده سبد دارایی به صورت جدول ۱۱، ارائه شده است. لازم به یادآوری است سایر شرکت‌های نمونه به دلیل اختصاص وزن بسیار ناچیز در پرتفوی (نزدیک به صفر) از لیست جدول حذف شده‌اند.

جدول ۱۱. نتایج حاصل درصد وزن اختصاص یافته به شرکت‌های تشکیل دهنده سبد سرمایه

نام شرکت	درصد وزن اختصاص یافته با روش PSO
صنایع پتروشیمی خلیج	۰/۳۱
گسترش نفت و گاز	۰
سرمایه‌گذاری غدیر	۰/۰۱۹
فولاد مبارکه اصفهان	۰/۰۴۵
پالایش نفت بندر عباس	۰/۰۵۱
شرکت ارتباطات سیار	۰
مخابرات ایران	۰
معدنی و صنعتی گل و گهر	۰/۰۳
گروه مپنا	۰/۰۲۱
ملی صنایع مس ایران	۰/۰۲۵
پالایش نفت اصفهان	۰/۰۲۲
معدنی و صنعتی چادرملو	۰/۰۲۵
سایپا	۰
گاز لوله	۰
کشتیرانی جمهوری	۰/۲۳۱
نفت سپاهان	۰/۰۲۵
تراکتورسازی ایران	۰/۰۲۴
توسعه معادن و فلزات	۰
گروه بهمن	۰/۰۲۸
بانک پاسارگاد	۰/۰۳۶
مدیریت سرمایه	۰/۰۲۳
پتروشیمی سازند	۰/۰۱۹
حفاری شمال	۰
نفت سپاهان	۰/۰۲۳
پتروشیمی پردیس	۰/۰۱۳
مجموع درصد وزن	۱

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بازده دارایی‌ها همواره با عدم اطمینان همراه است و در طی زمان نوسانات غیر منتظره‌ای به لحاظ شرایط اقتصادی، اجتماعی و سیاسی و... در بازدهی دارایی‌ها از جمله سهام روی می‌دهد. یکی از ابعاد مهم در مسائل بهبودسازی سبد سهام انتخاب معیار ریسک مناسب است. معیارهای ریسک گوناگونی در این زمینه ارائه شده است. از طرفی با توجه به عدم تقارن و غیرنرمال بودن تابع توزیع دارایی‌ها باید از معیارهای ریسکی استفاده کرد که برخلاف واریانس نسبت به تقارن بازده دارایی‌ها بی‌تفاوت هستند. در مقایسه با پژوهش‌های پیشین، معرفی آنتروپی به عنوان یکی از معیارهای جدید ریسک که نسبت به تقارن بازده دارایی‌ها بی‌تفاوت است و استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات برای حل سریع‌تر و دقیق‌تر مسائل بهبودسازی چند هدفه، از نوآوری‌های این پژوهش است.

در این پژوهش برای تشکیل سبد سهام بهینه بر اساس معیارهای میانگین-واریانس-آنتروپی در مرحله نخست برای دوره سه ماهه بعدی اقدام به پیش‌بینی ریسک و بازده دارایی‌ها با استفاده از مدل‌های اقتصادسنجی شده است و در مرحله بعد با استفاده از معیارهای مطرح شده در رابطه ۱، بهبودسازی سبد سهام انجام گرفت. همچنین در پژوهش حاضر با استفاده از معیار شارپ محاسبه شده توسط دو روش میانگین-واریانس مارکویتز و مدل ارائه شده در پژوهش طی چندین دوره زمانی متوالی این نتیجه حاصل شد که مدل ارائه شده در پژوهش عملکرد بهتری را نسبت به روش مارکویتز نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که در حل مسائل بهبودسازی چندهدفه استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات می‌تواند منجر به افزایش سرعت مدل شود و نتایج دقیقتری را ارائه دهد.

منابع

دارایی، ر.، وقفی، س.، حبیبزاده، س. ج.، و آهنگری، م. (۱۳۹۴)، انتخاب پرتفوی بهینه سهام در شرکت‌های پذیرفته شده بورس اوراق بهادار تهران به روش ICDE. فصلنامه دانش مالی تحلیل‌های اوراق بهادار، ۹(۳۱)، ۱۱۱-۱۲۲.

موشخیان، س.، و نجفی، ا. (۱۳۹۴). بهبودسازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات برای مدل احتمالی چند دوره‌ای میانگین-نیم واریانس-چولگی. فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار (مدیریت پرتفوی)، ۶(۲۳)، ۱۳۳-۱۴۷.

ميرزاىى، ح.، خدامى پور، ا.، و پورحيدرى، ا. (۱۳۹۵). بررسى كاربرد الگورىتم ژنتيك چندهدفه در بهينه سازى پرتفوى سهام با استفاده از شاخص هاى تكنيكال. فصلنامه مهندسى مالى و مديريت اوراق بهادار، ۷(۲۹)، ۶۷-۸۴.

References

- Bera, A. K., & Park, S. Y. (2008). Optimal Portfolio Diversification Using the Maximum Entropy Principle. *Econom Rev*, 27(15), 484–512.
- Celikyurt, U., & Ozekici, S. (2002). Multiperiod Portfolio Optimization Models in Stochastic Markets using the Mean-variance Approach. *European Journal of Operational Research*, 1(4), 186–202.
- Darabi, R., Vaghfi, S., Habib zade, S., & Ahangari, M. (2016). Select Optimal Portfolio of Stock in Companies Listed at Tehran Stock Exchange. *Financial knowledge of Securities Analysis*, 9(31), 111-122. (In Persian)
- Goptha, S. (2012). A Class of Multi-period Semi-variance Portfolio Selection with a Four Factor Futures Price Model. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29(18), 19–34.
- Huang, X. (2008). Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 16(21), 170-176.
- Kennedy, J., & Eberhart, R. C. (1995). Particle Swarm Optimization. *Proceedings of IEE International Conference on Neural Networks IV*, Piscataway, N J: IEEE Press, 1942-1948.
- Li, D. (2016). Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-variance Formulation. *Mathematical Finance*, 10(5), 387–406.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.
- Mirzaei, H. Khodamipour, A., & Porheidari, A. (2017). Applying Multi Objective Genetic Algorithms in Portfolio Optimization by Technical Indicators. *Journal of Financial Engineering and Portfolio Management*, 7(29), 67-84. (In Persian)
- Mushkhian, S., & Najafi, A. (2016). A Possibilistic Mean-Semivariance-Skweness Model for Portfolio Selection with Multi Objective Particle

- Swarm Algorithm. *Journal of Financial Engineering and Portfolio Management*, 6(23), 133-147.(In Persian)
- Pindoriya, N. (2014). Multi-Objective Mean–variance–skewness Model for Generation Portfolio Allocation in Electricity Markets. *Electric Power Systems Research*, 80(10), 1314-1321.
- Takano, Y., & Gotoh, J. y. (2015). Constant Rebalanced Portfolio Optimization under Nonlinear Transaction Costs. *Asia-Pacific Finance Markets*, 18(7),191–211.
- Tunchan, C. (2009). Particle Swarm Optimization Approach to Portfolio Optimization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(8), 2396-2406
- Wei, S. Z. (2015). Multi-period Optimization Portfolio with Bankruptcy Control in Stochastic Market. *Applied Mathematics and Computation*, 186(15),414–425.
- Yan, W., Miao, R., & Li, S. R. (2007). Multi-period Semi-variance Portfolio Selection: Model and Numerical Solution, *Applied Mathematics and Computation*, 194(5), 128–134.
- Zego, G. P. (2011). No More VaR. *Journal of Banking & Finance*, 26(12), 1247-1252.
- Zhang, W. G., Liu, Y. j., & Xu, W. J. (2012). A Possibilistic Mean-Semi Variance-Entropy Model for Multi-Period Portfolio Selection with Transaction Costs. *European Journal of Operational Research*, 222(5), 341–349.
- Zhang, X. L. (2009). Using Genetic Algorithm to Solve a New Multi-period Stochastic Optimization Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 231(13),114-123.