Journal of Risk Modeling and Financial Engineering
مدلسازی ریسک و مهندسی مالی

دانشگاه خاتم
دورهٔ ۱، شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۵
ص. ۷۶-۹۶

بهینه‌سازی استوار پرتفوی با استفاده از تکنیک آشفتگی و تابع ارزش در معرض ریسک شرطی

خدیجه حسنلو[۱]

چکیده: در این پژوهش روش بهینه‌سازی استوار در بهینه‌سازی پرتفوی مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از تخمین اطلاعات در فرآیند بهینه‌سازی پرتفوی، موجب عدم قطعیت ناشی از تخمین خواهد شد، از این‌رو باید از روشی استفاده کرد که قابلیت وارد نمودن ریسک تخمین را داشته باشد، بهینه‌سازی استوار دارای این توانایی است. برای بررسی استواری پرتفوی،از تکنیک آشفتگی استفاده شده است. علت انتخاب این تکنیک، افزایش ناگهانی در شاخص‌های بورس اوراق بهادار ایران در سال ۹۲ است که می‌تواند به عنوان سناریوی آشفتگی وارد مدل شود. به این صورت که فرض می‌کنیم، توزیع احتمال بازده، دچار نوسان شده و اثرات این نوسان را بر روی پرتفوی، بررسی خواهیم کرد، همچنین از تابع ارزش در معرض ریسک شرطی برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی استفاده کرده‌ایم. با بررسی استواری و تست حساسیت پرتفوی، این نتیجه حاصل شد که احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی بر روی میزان تابع کمینه ریسک و تابع کمینه زیان اثرگذار بوده و باید کنترل شود. در پایان با بررسی کارایی، مشاهده شد که پرتفوی مورد نظر کارا نبوده و از این‌رو اقدام به ایجاد ترکیب پرتفوی با ریسک کمتر، صورت گرفت.

واژگان کلیدی: *ارزش در معرض ریسک شرطی، بهینه‌سازی استوار، پرتفوی کارا، تکنیک آشفتگی.*

JEL: C61, G11

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه خاتم، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۱۰ **تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۲۵**

نویسندهٔ مسئول مقاله: خدیجه حسنلو **E-mail: kh.hassanlou@khatam.ac.ir**

نحوهٔ استناد به این مقاله: حسنلو، خ. (۱۳۹۵). بهینه‌سازی استوار پرتفوی با استفاده از تکنیک آشفتگی و تابع ارزش در معرض ریسک شرطی. فصلنامهٔ مدلسازی ریسک و مهندسی مالی، ۱(۱)، ۷۶-۹۶.

مقدمه

مدل میانگین–واریانس توسط هری مارکویتز در سال ۱۹۵۲ ارائه شد. هدف از اجرای ایـن مـدل موارد زیر است:

۱. ترکیب دارایی‌ها به گونه‌ای انتخاب شود که بازده مورد انتظار،تحت شرایطی کـه ریسـک پرتفوی کمینه گردد، تامین شود.

۲. ترکیب دارایی‌ها به گونه‌ای انتخاب شود که در یک سطح ریسک معین، پرتفوی به بازدهٔ بیشینه دست یابد (کوشچ ۲۰۱۲).

یکی از مسائلی که جواب بهینهٔ آن تا حد زیادی متأثر از خطای پیش‌بینی و اطلاعات ناکامل است، مسئله بهینه‌سازی پرتفوی است زیـرا مقـادیر ورودی مـدل، هماننـد میـانگین و واریـانس تخمینی هستند و همین حساسیت بالا موجب شده تا تلاش فراوانی در راستای تخمین دقیق این ورودی‌ها، انجام شود. پژوهش‌های صورت گرفته در این حوزه نشان داد که خطاهای پـیش‌بینـی به میزان قابل توجهی بر روی نتایج وزنی پرتفوی اثرگذار است. به عنوان مثـال بلـک و لیتـرمن (۱۹۹۱) نشان دادند که بهینه‌سازی میانگین–واریانس می‌تواند منجر به تولید بردار وزنی نامعقول برای تعدادی از دارایی‌های پرتفوی شود. گرین و هالیفلد (۱۹۹۲) نشان دادند کـه پرتفـوی مـدل میانگین–واریانس به طور کامل متنوع نیست. میچاورد (۲۰۰۸) خطای بیشینه‌سازی را در مسـائل بهینه‌سازی پرتفوی مطرح کرد. لازم به یادآوری است که نتایج این پژوهش‌ها به هیچ وجه دلیلی بر رد تئوری میانگین–واریانس نبوده بلکه بدین مفهوم است که در عمل باید چارچوب کلاسـیک در رابطه با مدل و تخمین خطاها تعدیل شود تا به حالت قابل اعتماد و پایدار برسد.

استفاده از تخمین پارامتر ورودی، موجب ریسک تخمین شـده و مـدل بایـد توانـایی دخیـل نمودن این ریسک را داشته باشد. بهینه‌سازی استوار[1] (یکی از شاخه‌های در حال رشـد در زمینـه بهینه‌سازی) ریسک تخمین را در پروسه تصمیم‌گیری انتخاب پرتفوی وارد می‌کنـد، بـه عبـارتی بهینه‌سازی استوار، یکی از روش‌های مناسب برای حل مسـائلی اسـت کـه مقـدار پـارامتر مـدل نامعلوم و یا دارای عدم قطعیت در توزیع احتمال باشد (گریگوری، داربی و میترا ۲۰۱۱).

در این مقاله فرض شده است که توزیع احتمال بازده دارایی‌هـا دارای عـدم قطعیـت بـوده و برای بررسی استواری پرتفوی، تکنیک آشفتگی[2] به‌کار گرفته شده است، به این صورت که فرض شده توزیع احتمال بازده دچار نوسان شده و سپس اثرات این نوسان بر روی پرتفوی، بررسی شده است. به عبارت دیگر، مدل ایستا یا پایه را با در نظر گرفتن توزیع احتمال متغیر، دچـار آشـفتگی

1. Robust Optimization
2. Contamination Technique

خواهیم کرد و اثرات تغییر در توزیع احتمال بر روی مقدار بهینـه تـابع و همچنـین جـواب بهینـه مساله را به‌دست خواهیم آورد. قابل بیان است که تکنیک آشفتگی روشی برای سنجش استواری تخمین زننده‌ها با استفاده از انحراف تخمین زننده از مقدار مورد نظر است (دوپاکوا ۲۰۰۶). بـرای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی از تابع ارزش در معرض ریسک شرطی(CVaR)[1] استفاده شده است.

برای اجرای متدولوژی پیشنهادی در این پژوهش، ابتدا مدل میانگین- ریسک برای پرتفویی از شاخص‌های منتخب بورس اوراق بهادار تهران شامل شاخص کل، شـاخص صـنعت، شـاخص بازار اول، شاخص بازار دوم، شاخص ۵۰ شرکت برتر و شاخص شناور آزاد به‌کار گرفته شده و بـه بررسی کارایی پرتفوهای به‌دست آمده پرداخته می‌شـود. در مرحلـه بعـد سـناریوهای لازم بـرای اجرای تکنیک آشفتگی را وارد مدل کرده و رفتار تابع CVar در حالـت آشـفته بـه عنـوان تـابع ریسک با کران‌های به‌دست آمده بررسی می‌شود. سپس به بررسی کـارایی پرتفوهـای بـه‌دسـت آمده با افزودن سناریوی جدید پرداخته می‌شود.

در بخش دوم این مقاله بصورت مختصر به پیشینهٔ پژوهش و مبانی نظـری مـرتبط پرداختـه شده است. سپس بخش سوم به شرح متودولوژی و داده‌های بکار گرفته شـده بـرای اجـرای آن می‌پردازد. در بخش چهارم متدولوژی پیشنهادی بـا اسـتفاده از داده‌هـای حقیقـی اجـرا و تسـت می‌شود و در نهایت در بخش پنجم به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از یافتـه‌هـای پـژوهش پرداختـه می‌شود.

پیشینهٔ پژوهش

هری مارکویتز (۱۹۵۲) نشان داد که چگونه یک سرمایه‌گذار می‌تواند بازدهٔ مورد انتظار پرتفوی را بیشینه کند درحالیکه همزمان ریسک آن که از طریق واریانس پرتفوی بـه دسـت آمـده اسـت را حداقل نماید. مارکویتز با تعریف کمی ریسک سرمایه‌گذاری، توانست یک رویکرد ریاضی در امـر انتخاب دارایی‌ها و مدیریت پرتفوی برای سرمایه‌گذاران ارائه کند امـا همـانطور کـه مـارکویتز و ویلیام شارپ نیز بیان کرده‌اند، برای فرمول اصلی موجود در تئوری مدرن پرتفوی، محدودیت‌های مهمی وجود دارد و تحت شرایطی ویژه، می‌توان نشان داد که مدل میانگین-واریانس، محاسبات و پیش‌بینی‌های رضایت‌بخشی از رفتار سرمایه‌گذار ارائه نمی‌کند.

پژوهش‌های فراوان و مبسوطی در حوزهٔ توسعهٔ مدل میانگین- واریانس و بهبود عملکـرد آن صورت گرفته است که پرداختن به همهٔ ابعاد آن در این بخش مقدور نیست. از جمله ضعف‌هـایی

1. Conditional Value at Risk

که خروجی مدل میانگین- واریانس را مورد نقد قرار می‌داد، بی‌توجهی به عدم قطعیت ذاتی موجود در داده‌های ورودی مدل و اثر خطای تخمین داده‌ها بر روی خروجی بود. از این‌رو پژوهشگران به ارائه رویکردهایی در راستای رفع آن پرداختند که از جمله این رویکردها می‌توان به تحلیل حساسیت، برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی پویا، برنامه‌ریزی تصادفی و بهینه‌سازی استوار اشاره کرد.

استواری به این معنی است که خروجی مدل نباید حساسیت بالا به مقادیر دقیق پارامترها و ورودی‌های مدل داشته باشد. بهینه‌سازی استوار به مدل‌سازی مسائل مربوط به بهینه‌سازی در شرایطی اطلاق می‌شود که عدم اطمینان داده‌ها مطرح باشد و به جوابی برسیم که در مورد همه یا اکثر پارامترهای نامطمئن، خوب باشد. بهینه‌سازی استوار می‌تواند به عنوان یک گزینهٔ مکمل برای تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی احتمالی مطرح باشد.

سویستر (۱۹۷۳) جزو اولین پژوهشگرانی بود که بر روی روش‌های بهینه‌سازی استوار خطی بحث نمود، مدل اولیه سویستر به ساختن جواب‌های شدنی برای یک مجموعه محدب می‌پرداخت. جواب‌های مدل سویستر بسیار محافظه کارانه بودند، به گونه‌ای که در مقابل تضمین استواری جواب از بهینگی صرف نظر می‌شد. در سال‌های بعد فالک (۱۹۷۶) بر روی برنامه‌ریزی خطی که دارای عدم قطعیت بود، پژوهش نمود. لیو و چزرس (۱۹۸۰) مدلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه ارائه دادند که از هر دو ریسک سیستماتیک و نرخ بهره استفاده شده به طوری که هر دوی این‌ها در دنیای واقعی دارای عدم قطعیت هستند. (چوپرا و زیمبا، ۱۹۹۳). با کمک شبیه‌سازی، اثر خطا در تخمین بازده‌های قابل پیش‌بینی، واریانس و کواریانس بر روی بازده بهینه پرتفوی را نشان دادند.

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) روش برنامه‌ریزی خطی مبنی بر بهینه‌سازی استوار ارائه دادند، مزیت این روش نسبت به خطی بودن قابلیت کنترل است. پژوهش‌های برتسیماس در این حوزه بسیار مفصل بوده و توانسته کاربردهای مختلفی از بهینه‌سازی استوار را در زمینه‌های گوناگون ارائه کند (برتسیماس و براونی، ۲۰۰۷). دمیگول و نوگالس (۲۰۰۹) پژوهشی با عنوان انتخاب پرتفوی با تخمین استوار ارائه دادند، در این پژوهش نوعی از پرتفوی ساخته شده است که ویژگی‌های استواری را به نحو بهتری نسبت به پرتفوی سنتی حداقل واریانس ارائه می‌دهد. این پرتفوی بوسیله تخمین زننده‌های استوار مشخصی ساخته شده است که می‌تواند تنها با یک برنامه‌ریزی غیرخطی محاسبه شود به طوری که تخمین استوار و بهینه‌سازی استوار تنها در یک مرحله انجام پذیرفته است. در این پژوهش نشان داده شده است که وزن پرتفوی به دست آمده بسیار کمتر از پرتفوی سنتی به تغییرات توزیع بازده، حساس است. زیملر و همکارانش (۲۰۱۱) الگوریتمی را برای حل مسائل عمومی پیوسته و گسستهٔ کمینه‌سازی با استفاده از بهینه‌سازی

استوار ارائه داده و کاربردهای آن را برای مدیریت ریسک بیان کرده‌اند. قهطرانی و نجفی (۲۰۱۳) با ارائهٔ یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی استوار توانستند به بهینه‌سازی مسئله چندهدفهٔ انتخاب سبد سهام بپردازند. دوپاکوا و کوپا (۲۰۱۲ و ۲۰۱۳) پژوهش‌های جامعی در حوزهٔ بررسی استواری پرتفوی انجام دادند. آنها با درنظر گرفتن محدودیت‌های مرتبط با ریسک پرتفوی از آزمون تصادفی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم برای ارزیابی کارایی پرتفوی بهینه استفاده کردند.

همانطور که اشاره شد، در این پژوهش با استفاده از تکنیک آشفتگی، استواری پرتفوی بهینه مورد بررسی قرار گرفته است. برای اجرای سناریوی آشفتگی رفتار تابع ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) در حالت آشفته، به عنوان تابع ریسک مورد استفاده قرار گرفته است. برای اولین بار توسط روکافلار و اوریاسو (۲۰۰۰) روشی را برای حداقل‌سازیCVar و مسائل بهینه سازی با محدودیت‌های این معیار ارائه کردند. عمدتاً این معیار در راستای رفع نواقص ارزش در معرض ریسک[1](VaR) تعریف شد. چرا که با وجود همهٔ مزایای VaR، هنگام به کارگیری آن برای تعیین پرتفوی بهینه مشکلاتی رخ می‌داد از جمله اینکه معیار VaR، از نظر محاسبات ریاضی، خواص رضایت‌بخشی ندارد، زیرا منجر به ایجاد یک مدل ریاضی غیرخطی و غیرمحدب می‌شود که درجه پیچیدگی آن نیز NP خواهد بود. از جمله مطالعات صورت گرفته در استفاده از معیار CVar برای بررسی استواری پرتفوی بهینه می‌توان به پژوهش صلاحی، مهردوست و پیری (۲۰۱۳) اشاره کرد که در آن CVar به عنوان تخمین‌زنندهٔ ریسک استفاده شده و پس از مقایسهٔ نتایج مدل پیشنهادی با مدل اجرا شده توسط مجموعه‌های عدم قطعیت بیضوی[2] به این نتیجه رسیدند که اجرای استواری پرتفوی از طریق CVar باعث ایجاد تنوع بیشتر در پرتفوی خواهد شد.

روش‌شناسی پژوهش

تکنیک آشفتگی

مدل عمومی برنامه‌ریزی تصادفی به صورت زیر است (دوپاکوا، ۲۰۰۶).

رابطهٔ (۱)
$$\min F\ (x,p) = E_p f\ (x,\omega)$$
St:
$$F_i(x,p) = E_p f_i(x,\omega) \le 0 \qquad \mathrm{i} = 1,\ldots\ldots,\mathrm{m}$$

1. Value at Risk
2. Ellipsoidal Uncertainty Sets

در رابطهٔ ۱، x متغیر تصمیم و w پارامتری است که دارای مقدار تصادفی است و f(x , w) تابعی است که برای نشان دادن مقدار زیان ناشی از متغیر x تعریف شده است و P نیز احتمال وقوع متغیر تصادفی w را نشان می‌دهد.

فرض کنید که p می‌تواند تغییر کند و مقادیر مختلف به خود بگیرد. برای ایجاد تغییر در p از تکنیک آشفتگی استفاده شده است. در این روش از متغیر t برای ایجاد تغییرات در p استفاده می‌شود، به این صورت که متغیر t در فاصله [۰،۱] نوسان می‌کند و یک توزیع احتمالی است که موجب آشفتگی در p می‌شود، واضح است که اگر t مقدار ۰ را اتخاذ کند، تغییری در p ایجاد نمی‌شود و اگر به طور متقابل، t مقدار ۱ را بگیرد، p در عمل به t تبدیل می‌شود. در این مقاله برای توزیع احتمال t که درواقع به محاسبهٔ احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی منجر خواهد شد، یک توزیع گسسته در بازهٔ [۰،۱] تخصیص داده و مقداردهی شده است.

رابطهٔ ۲، نشان دهندهٔ p درحالت آشفته است:

رابطهٔ ۲)
$$p_t = (1-t)p + t$$

مدل تصادفی رابطهٔ ۱ را دوباره بازنویسی می‌کنیم:

رابطهٔ ۳)
$$\min F(x,p) = E_p f(x,\omega) = \int f(x,\omega)dp(\omega)$$

با جایگزینی مقدار p آشفته، رابطهٔ ۳ به صورت زیر نمایش داده می‌شود (دوپاکوا، ۲۰۰۶):

رابطهٔ ۴)
$$F(x,p_t) = F(x,t) = \int f(x,\omega)dp_t(\omega) = (1-t)F(x,p) + tF(x,Q)$$

مقدار بهینهٔ $F(x,t)$ را با $\varphi(t)$ وجواب بهینه را با $X*(P)$ نشان می‌دهیم. قابل بیان است که $\varphi(t)$ تابعی مقعر در t بر روی فاصلهٔ پیوسته [۰،۱] است (دوپاکوا، ۲۰۰۶ و ۲۰۱۳).

با توجه به پژوهش‌های دوپاکوا (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸) و دوپاکوا و کوپا (۲۰۱۳) محدودهٔ عمومی برای $\varphi(t)$ را می توان به صورت زیر بیان نمود:

رابطهٔ ۵)
$$(1-t)\varphi(0) + t\varphi(1) \le \varphi(t) \le \varphi(0) + t\varphi'(0^+)$$

با توجه به رابطهٔ ۴، مشتق $\varphi(t)$ نسبت به t در نقطه صفر برابر است با :

رابطهٔ ۶)
$$\varphi'(0^+) = F(x*(p),Q) - \varphi(0)$$

با توجه به پژوهش دوپاکوا و پولیفکا (۲۰۰۵)، تابع ارزش در معرض ریسک شرطی یا $CVaR(x,t) = CVaR(x,p_t)$ در $t \in [0,1]$ مقعر است. در اینجا برای پوشش ریسک، از تابع $CVAR$ استفاده می‌کنیم، یعنی:

رابطهٔ ۷)
$$\varphi(t) = CVaR(x,p_t)$$

تابع $CVAR$ به صورت زیر تعریف می‌شود (روکافلار و اوریاسو،۲۰۰۰):

رابطهٔ ۸) $$\varphi_{\alpha}(x,\nu,p)=\nu+\frac{1}{1-\alpha}E_{p}(f(x,\omega_{s})-\nu)^{+}$$

رابطهٔ ۹) $$CVaR_{\alpha}(z,p)=\min\{\nu+\frac{1}{1-\alpha}E_{p}[f(x,\omega_{s})-\nu]^{+}\}$$

در رابطه‌های بالا، $f(x,\omega_s)$ عبارتست از مقدار زیان ناشی از متغیر x . α نیز بعنوان سطح اطمینان تعریف شده است. و برای متغیر $\nu \in R$ داریم.

در ابتدا مشتق $CVaR(x,p_t)$ نسبت به tرا به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

رابطهٔ ۱۰) $$\Delta CVaR_{\alpha}(x,t)/\Delta t=\min\phi_{\alpha}(x,\nu^{*}(x,p),Q)-CVAR(x,p)$$

رابطهٔ محدودهٔ عمومی $\varphi(t)$ برای تابع ریسک $CVaR(x,p_t)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

رابطهٔ ۱۱) $$(1-t)CVaR(x,p)+tCVaR(x,Q)\le CVaR(x,p_{t})\le$$
$$(1-t)CVaR(x,p)+t\phi_{\alpha}(x,\nu^{*}(x,p),Q)$$

مدلسازی تکنیک آشفتگی برای بررسی استواری پرتفوی

برای اجرای تکنیک آشفتگی، پرتفویی شامل ۶ شاخص بورس اوراق بهادار (کل، صنعت، ۵۰ شرکت برتر، شناور آزاد، بازار اول، بازار دوم) را در فاصله زمانی فروردین ماه سال ۸۸ تا اردیبهشت ماه سال ۹۲ در نظر می‌گیریم، مقادیر شاخص‌ها به صورت میانگین هر ماه به‌دست آمده‌اند. مجموع داده‌های به‌دست آمده برای هر شاخص ۵۰ عدد است که تعداد سناریوهای لازم برای اجرای تکنیک آشفتگی است.

روش کار در این پژوهش به این صورت است که ابتدا مدل میانگین-ریسک را با هدف کمینه کردن ریسک و بیشینه کردن بازده، با ضرایب اطمینان ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ حل می‌کنیم و سپس به بررسی کارایی پرتفوهای به‌دست آمده می‌پردازیم. در مرحلهٔ بعد سناریوی آشفتگی که همان مقادیر مربوط به هریک از دارایی‌ها در خردادماه ۹۲ است را وارد مدل کرده و رفتار تابع CVaR در حالت آشفته را به عنوان تابع ریسک با کران‌های به‌دست آمده بررسی می‌نماییم، در حالت دوم، مدل میانگین-ریسک را با هدف بیشینه کردن بازده یا (کمینه کردن زیان) به طوری که CVaR کمتر از مقدار مشخصی شود اجرا کرده و رفتار توابع به‌دست آمده را بررسی نموده و مورد مقایسه قرار می‌دهیم.در مرحلهٔ بعد به بررسی کارایی پرتفوهای به‌دست آمده با افزودن سناریوی جدید خواهیم پرداخت. بنابراین مدلسازی مسأله شامل مراحل زیر است:

مدلسازی میانگین–CVaR در حالت آشفته با هدف کمینه نمودن ریسک

برای حل مسئلهٔ میانگین-CVaR با هدف کمینه نمودن ریسک، تابع هدف و محدودیت در برنامه‌ریزی تصادفی، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(x,p)=CVaR(-\sigma' w)$$
$$f(x,p)=E_p(-\sigma' w)-\mu(p)$$
رابطهٔ ۱۲)

در رابطهٔ ۱۲، x عبارتست از جواب قابل قبول مسأله LP، σ' بردار بازده پرتفوی، w بردار وزنی پرتفوی و $\mu(p)$ بیشینهٔ زیان قابل پیش‌بینی که می‌توان اجازه داد به پرتفوی وارد شود $\mu(p)$ را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد :

$$\mu(p)=-E_P\sigma'(\frac{1}{6},\frac{1}{6},...,\frac{1}{6})'=\frac{1}{50}\sum_{S=1}^{50}-r^s(\frac{1}{6},\frac{1}{6},...,\frac{1}{6})'$$
رابطهٔ ۱۳)

مدل میانگین-CVaR به صورت زیر بیان می‌شود:

رابطهٔ ۱۴)
$$\varphi(0)=\min \nu+\frac{1}{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{50}\frac{1}{50}z_s\right)$$
$$z_s\geq -r^s w-\nu$$
$$-\sum_{s=1}^{50}\frac{1}{50}r^s w-\mu(p))\leq 0$$
$$\sum_{i=1}^{6}w_i=1$$

α = { ۰/۹۰ و ۰/۹۵ و ۰/۹۹ } در نظر می‌گیریم. مدل میانگین-CVaR در حالت آشفته به صورت زیر بیان می‌شود:

رابطهٔ ۱۵)
$$\varphi(t)=\min \nu+\frac{1}{1-\alpha}\left(\sum_{s=1}^{50}\frac{1}{50}(1-t)z_s+tz_{51}\right)$$
$$z_s\geq -r_s w-\nu$$
$$-\sum_{s=1}^{50}\frac{1}{50}(1-t)r^s w-tr^{51}w-\mu((1-t)p+tQ))\leq 0$$
$$\sum_{i=1}^{6}w_i=1$$

در رابطهٔ ۱۵ داریم :

$$\mu((1-t)p+tQ)=-\sum\frac{1}{50}(1-t)r^s(1/6,1/6,...,1/6)' \quad -tr^{51}(1/6,..,1/6)$$

مدلسازی میانگین–CVaR در حالت آشفته با هدف کمینه نمودن زیان

برای حل مسئلهٔ میانگین-CVaR با هدف کمینه نمودن زیان، تابع هدف و محدودیت در برنامه‌ریزی تصادفی به صورت زیر بیان می‌شود:

رابطهٔ ۱۶)

$$F(x,p) = E_p(-\sigma' w)$$
$$f(x,p) = CVAR(-\sigma' w) - b$$

پارامتر b در واقع حداکثر مقدار ریسکی است که می‌توان برای پرتفوی لحاظ کرد. در این حالت مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

رابطهٔ ۱۷)

$$\varphi(t) = -\sum_{s=1}^{50} \frac{1}{50}(1-t) r^s w - t r^{51} w$$
$$v + \frac{1}{1-\alpha}\left(-\sum_{s=1}^{50} \frac{1}{50}(1-t) z_s + t z_{51} \right) - b \le 0$$
$$z_s \ge -r_s w - v$$
$$\sum_{i=1}^{6} w_i = 1$$

در مرحلهٔ آخر به بررسی کارایی پرتفوی با ضرایب وزنی مورد نظر پرداخته می‌شود. به این صورت که مجموع تفاضل ارزش در معرض ریسک شرطی پرتفوی فرضی با ضریب وزنی مجهول λ و ارزش در معرض ریسک شرطی با ضریب وزنی معلوم w را محاسبه نموده (مقدار تفاضل بعد از محاسبهٔ بردار λ و برای ضرایب اطمینان متفاوت، قابل محاسبه خواهد بود) و اگر این تفاضل برابر با صفر شد، پرتفوی موجود با ضریب وزنی w کارا بوده و در صورت منفی شدن، کارا نیست. در نتیجه پرتفوی با ضریب وزنی λ دارای مقدار ریسک کمتر و درنتیجه بر پرتفوی موجود غالب است.

نتایج حاصل از اجرای تکنیک آشفتگی برای بررسی استواری پرتفوی شامل شاخص های بورس اوراق بهادار ایران

همانطور که در بخش قبل مراحل مدلسازی ارائه شد در این بخش به اجرای مدل‌های بررسی شده می‌پردازیم:

الف) بررسی رفتار CVaR در مدل میانگین-CVaR با هدف کمینه نمودن ریسک در حالت آشفته.

جدول ۱. اطلاعات مربوط به میانگین شاخص‌ها و مقادیر سناریوی آشفتگی

شاخص	میانگین شاخص	بیشینه شاخص	مقادیر سناریوی آشفتگی در خرداد ۹۲
شاخص کل	۲۱۷۴۱/۳۸۰۲۴	۴۳۵۴۹	۴۶۶۴۶/۷۸۹۴۷
شاخص بازار اول	۱۷۹۲۴/۹۷۷۶	۳۳۲۰۷	۳۴۸۰۴/۶۵۲۶۳
شاخص بازار دوم	۳۰۴۶۷/۵۳۰۵۲	۷۹۷۷۹	۸۶۳۰/۲۸۹۴۷
شاخص صنعت	۱۷۳۱۴/۲۷۳۶۲	۳۷۸۸۴	۳۹۳۸۹/۳۷۳۶۸
شاخص ۵۰ شرکت برتر	۹۸۶/۷۵۴	۱۶۷۱	۱۸۰۴/۸۳۷
شاخص شناور آزاد	۲۶۹۱۵/۱۲۷۸۵	۴۹۹۲۵	۵۲۴۸۳/۳۸۴۲۱

در جدول ۱، مقادیر مربوط به میانگین، بیشینه و همچنین مقدار سناریوی آشفتگی برای هر کدام از شاخص‌ها در خرداد ۹۲ قابل مشاهده است.

نتایج حل مدل میانگین-ریسک در حالت غیرآشفته یا به عبارتی قبل از اضافه نمودن مقادیر مربوط به سناریوی آشفتگی در خرداد ۹۲، با هدف حداقل نمودن ریسک در سه سطح اطمینان ۹۰ درصد، ۹۵ درصد و ۹۹ درصد در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول۲. مقادیر مربوط به پرتفوی به‌دست آمده از مدل ثابت (غیر آشفته)

		ضریب اطمینان	**ضریب**	**ضریب**
ارزش در معرض ریسک شرطی		7.8606e-014	8.60e-16	4.16e-09
وزن شاخص کل	W1	۰/۰۶۱۹	۰/۰۸۳	۰/۰۸۹۳
وزن شاخص بازار اول	W2	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۳
وزنی شاخص بازار دوم	W3	۰/۵۰۰۴	۰/۶۰۲۴	۰/۳۵۱۲
وزن شاخص صنعت	W4	۰/۰۴۰۶	۰/۰۵۶	۰/۰۴۲۳
وزن شاخص ۵۰ شرکت	W5	۰/۰۳۳۶	۰/۰۸۷۴	۰/۰۰۶۴
وزن شاخص شناور آزاد	W6	۰/۳۶۳۰	۰/۱۶۹	۰/۵۰۸۵

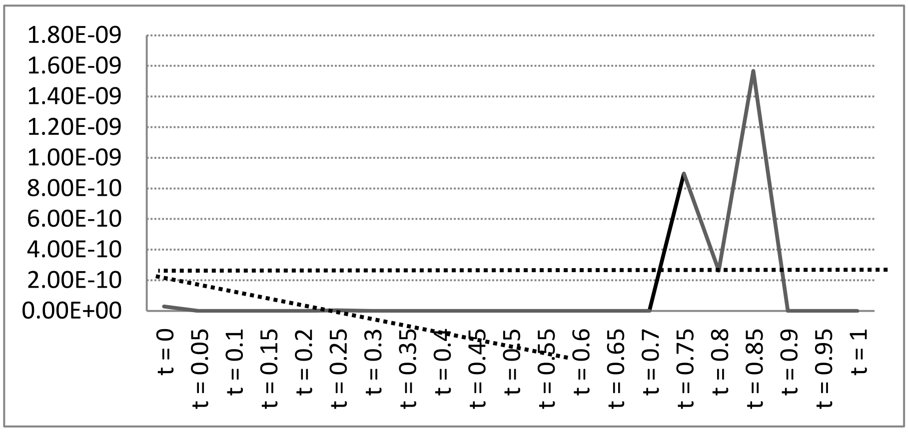
در مرحلهٔ بعد مدل میانگین-ریسک در حالت آشفته طبق رابطهٔ ۱۴ (بعد از اضافه نمودن مقادیر مربوط به سناریوی آشفتگی در خرداد ۹۲) و با هدف حداقل نمودن CVaR، برای مقادیر گسسته‌ای از t حل می‌شود.

با استفاده از رابطهٔ ۱۱، کران بالا و پایین تابع ریسک از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$(1-t)CVaR(x,p)+tCVaR(x,Q)\le CVaR(x,p_t)\le$$
$$(1-t)CVaR(x,p)+t\phi_{\alpha}(x,\nu^{*}(x,p),Q)$$

به منظور اجتناب از افزایش حجم مقاله، از آوردن همهٔ نتایج عددی پرهیز کـرده و در شـکل ۱، حداقل CVaR(x,t) در حالت آشفته با دو کران بالا و پایین آن برای زمانهای مختلف و برای ضریب اطمینان ۹۵درصد ارائه شده است.

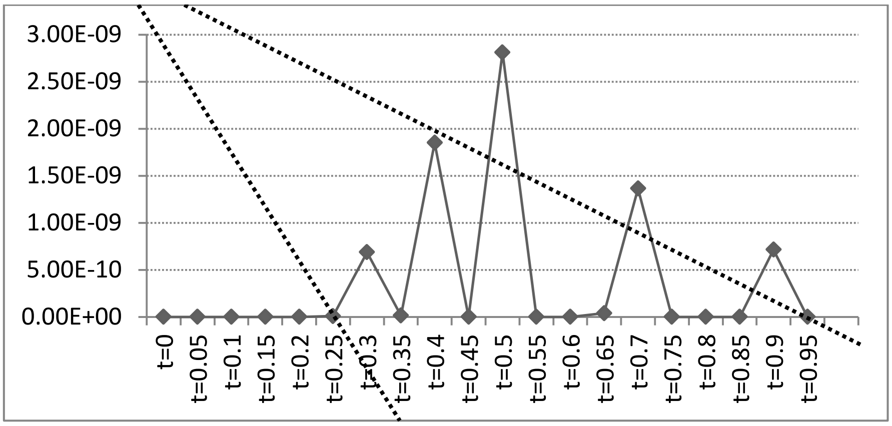
همانطور که مشاهده می‌کنیم در شکل ۱، CVaR(x,t) بالاتر از کران پایین قرار گرفته است و تقریبا در نقاط $0 \le t \le 0.7$ و $0.9 \le t \le 1$ با کران بالا مماس شـده اسـت. مـابین نقـاط $0.7 \le t \le 0.9$ تابع ریسک ناگهان افزایش یافته و این نشان‌دهنده اینست که احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی نباید حدود $0.7 \le t \le 0.9$ انتخـاب شـود چـون موجـب افـزایش ناگهـانی ریسک پرتفوی خواهد شد و بهتر است احتمال انتخاب سناریوهای اولیه بیشتر از احتمال انتخـاب سناریوی آشفتگی باشد.



شکل ۱. مقایسهٔ حداقل CVAR(x,t) در مدل میانگین-CVAR با کران‌های بالا و پایین با ضریب اطمینان ۰/۹۵

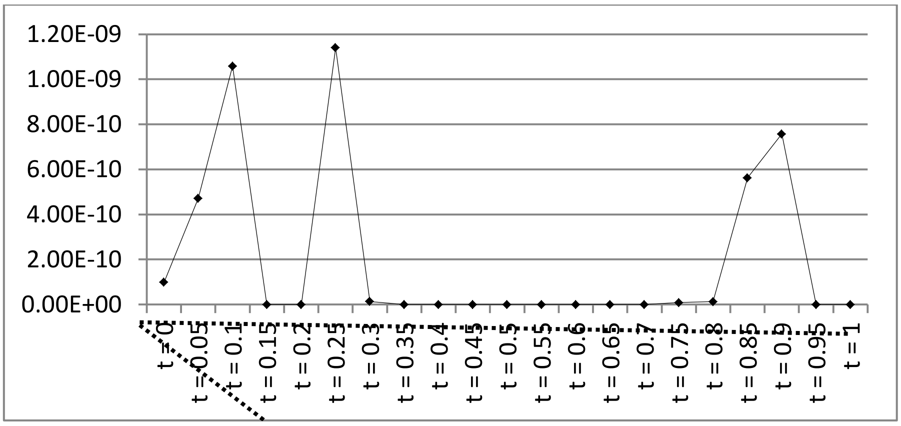
در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب نموداری مربوط به مقایسهٔ حـداقل CVaR(x,t) بـا دو کـران بالا و پایین با ضریب اطمینان ۹۹درصد و ۹۰درصد ارائه شده است.

در شکل ۲، در حوالی t=0.5 بیشترین افزایش در تابع ریسک مشاهده می‌شود، به بیان دیگر احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی نباید ۵۰ درصد باشد.



شکل ۲. مقایسهٔ حداقل CVAR(x,t) در مدل میانگین- CVAR با کران های بالا و پایین با ضریب اطمینان ۰/۹۹

در شکل ۳، بهتر است t را در محدودهٔ ۰.۳ تا ۰.۸ انتخاب کنیم، زیرا CVaR دارای ثبات بیشتر و مقدار کمتر است. در این محدوده از t، شاخص بازار دوم و شاخص بازار اول بیشترین ضرایب وزنی را دارند.

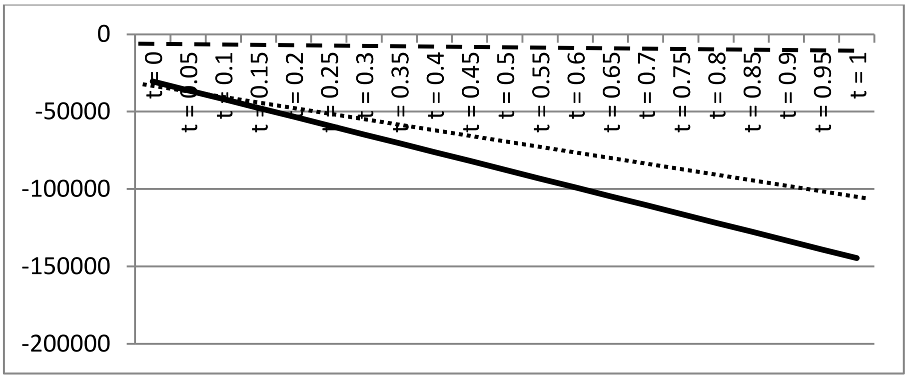


شکل ۳. مقایسهٔ حداقل CVAR(x,t) در مدل میانگین- CVAR با کران های بالا و پایین با ضریب اطمینان ۰/۹۰

ب) بررسی رفتار زیان در مدل میانگین- CVaR با هدف کمینه نمودن زیان در حالت آشفته.

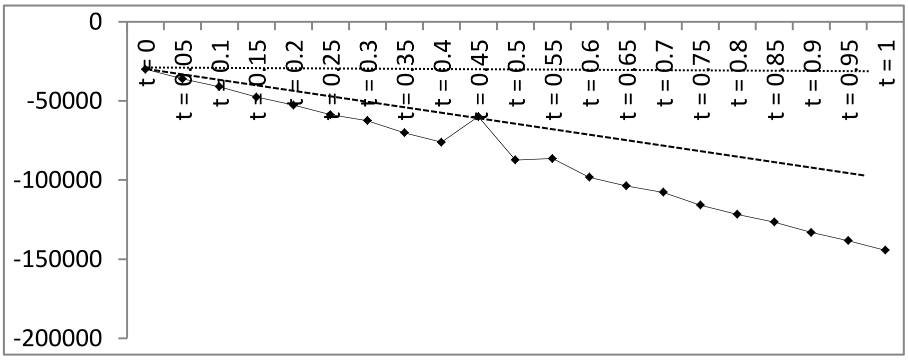
مدل میانگین-ریسک در حالت آشفته (رابطهٔ ۱۷) را حل کرده و در شکل ۴، مقدار حداقل CVaRدر کنار کران بالا و پایین آن و برای b=0.2 (همانطور که قبلاً اشاره شد، این پارامتر

مربوط به مقدار ریسک قابل تحمل است) قابل مشاهده است. لازم به یادآوری است کـه در ایـن حالت برای به دست آوردن کران بالا و پایین از رابطهٔ ۵ استفاده شده است.

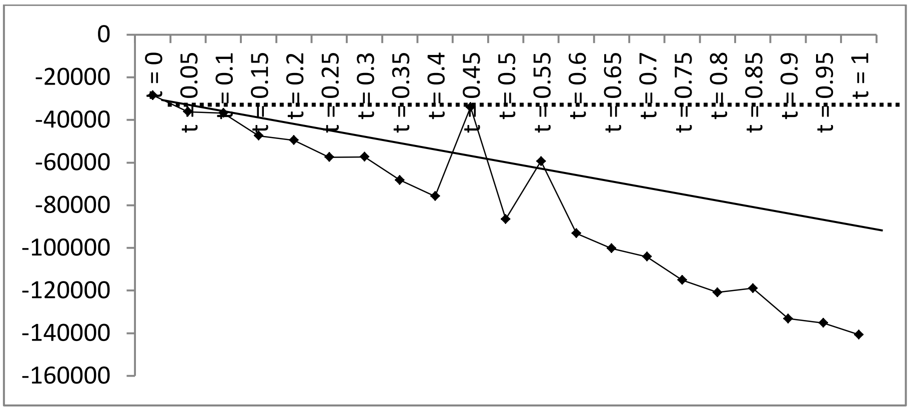


شکل ۴. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVAR با کران های بالا و پایین(b=0.2)

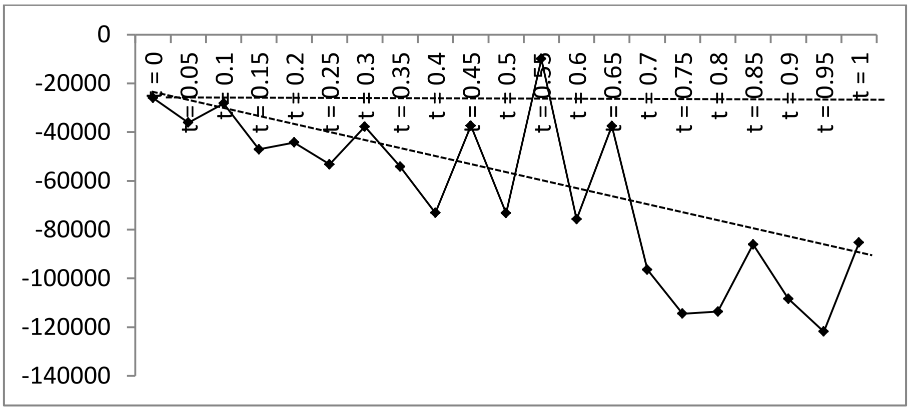
در شکل ۴، کران بالا و پایین و تابع زیان، در نقطه t=0 با هم برخورد دارند ولی بعـد از ایـن نقطه، نمودار حداقل زیان از کران پایین، کمتر شده است و مشاهده می‌شود با افـزایش مقـدار t، میزان زیان، رشد بالایی دارد به طوری که از مقدار تقریبا ۳۰۰۰۰ به مقدار ۱۴۰۰۰۰ افزایش پیدا کرده است. این نشان دهنده این است که هر احتمال انتخاب سـناریوی آشـفته موجـب افـزایش زیان پرتفو خواهد شد. در واقع اگر بیشینه ریسک، ۰/۲ در نظر گرفته شود، سناریوی آشـفتگی را نباید وارد مدل کرد زیرا زیان را تا حد بـالایی افـزایش خواهـد داد. در مراحـل بعـد بـا افـزایش محدودیت ریسک، رفتار زیان حالت پایدارتر و یکنواخت‌تری را پیدا می‌کند، بـه گونـه ای کـه در b=-100 نمودار زیان به طور کامل بین کران‌های بالا و پایین قرار گرفته است. شکل‌هـای ۵ تـا ۱۲ با اتخاذ مقادیر مختلف برای b بیانگر این موضوع است.



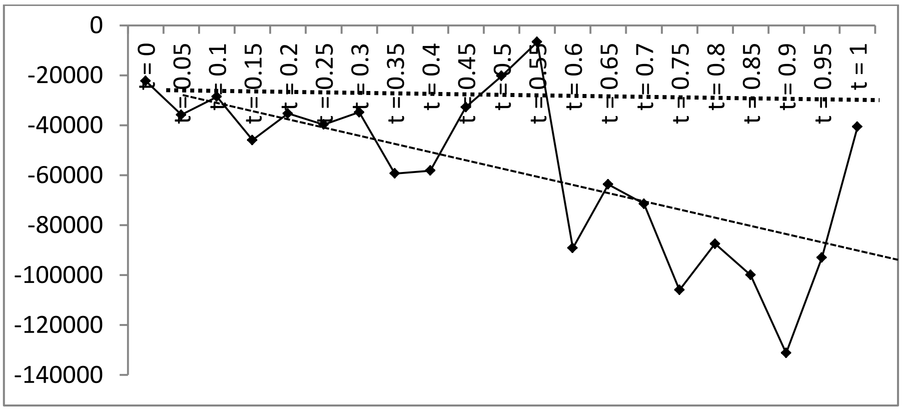
شکل ۵. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-0.001)



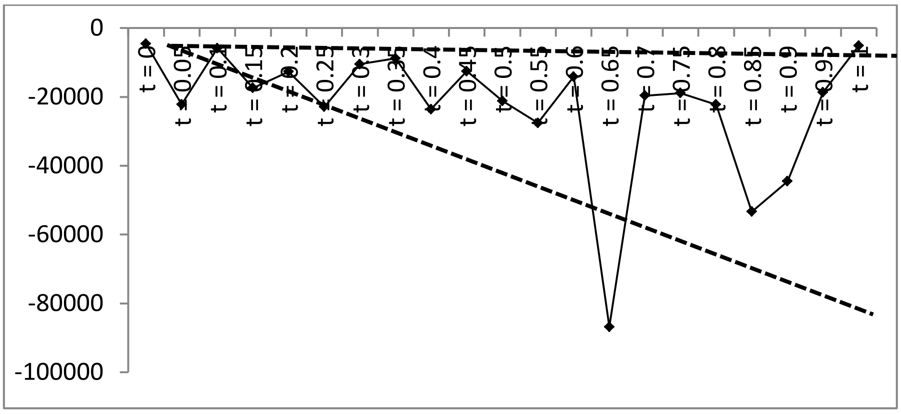
شکل ۶. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-0.01)



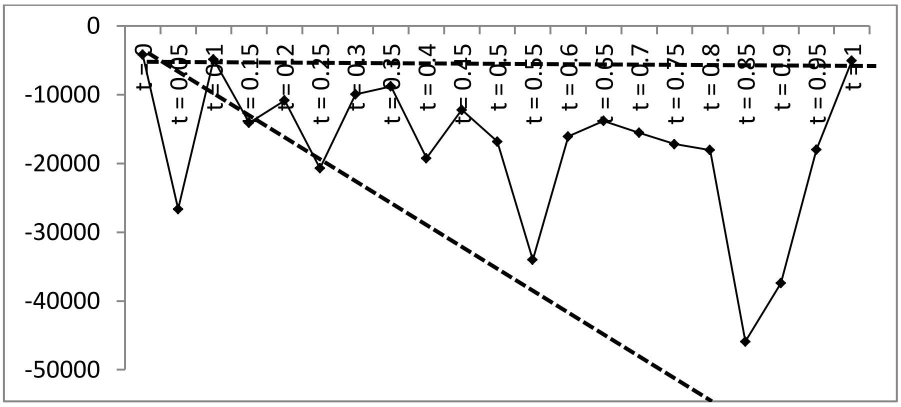
شکل ۷. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-0.1)



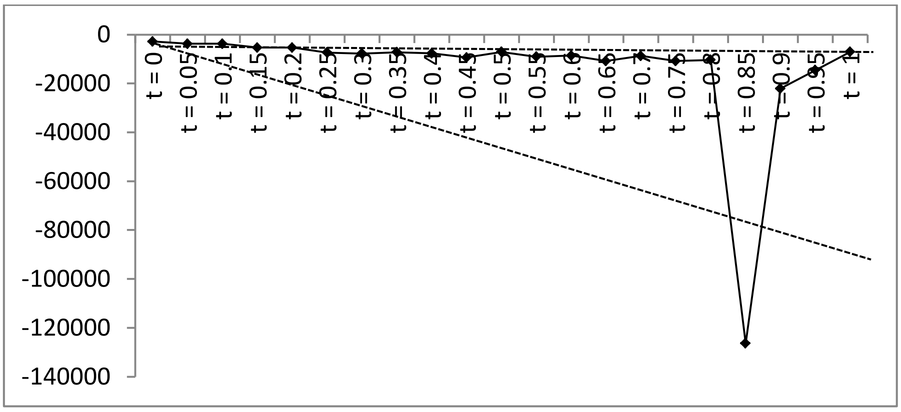
شکل ۸. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-1)



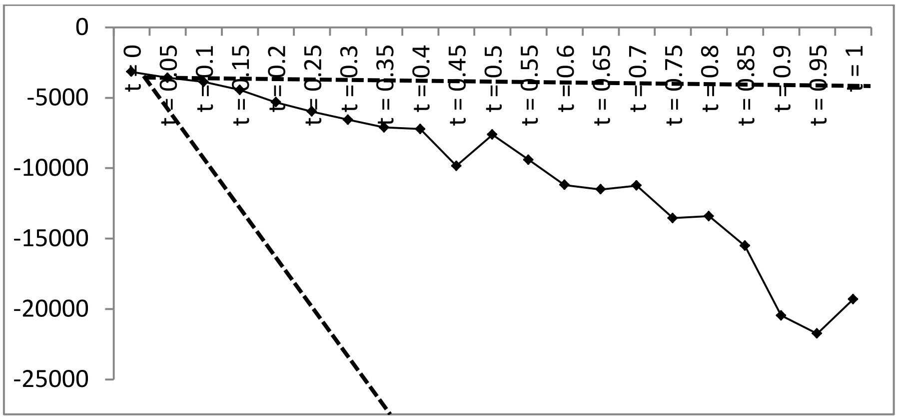
شکل ۹. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-7)



شکل ۱۰. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-8)



شکل ۱۱. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین-CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-30)



شکل ۱۲. مقایسهٔ حداقل زیان در مدل میانگین–CVaRبا کران های بالا و پایین (b=-100)

پرتفوی کارا

از نظر سرمایه‌گذار پرتفویی کارا است که پرتفویی بهتر از آن نباشد. کارا بودن پرتفو را می‌توان به کمینه شدن ریسک پرتفو در شرایط ثابت ماندن بازده نیز تعبیر نمود. یعنی اگر با سطح بازدهٔ مورد نظر، پرتفویی یافت نشود که ریسک را کمتر از پرتفوی موجود کند، در این صورت پرتفوی کنونی کارا است. عبارت بالا را می‌توان به صورت رابطهٔ ۱۸، بیان نمود (کوپا و چوانک، ۲۰۰۸؛ کوپا، ۲۰۱۰؛ دوپاکوا و کوپا، ۲۰۱۳).

رابطهٔ ۱۸)

$$\varepsilon = \sum a_s$$
$$s.t$$
$$CVAR(-\sigma'\lambda) - CVAR(-\sigma'w) \le a_s$$
$$s = 1,2\ldots,S$$

در رابطهٔ ۱۸ تابع هدف، حاصل مجموع تفاضل توابع ریسک در دو پرتفوی کنونی و پرتفویی با ضریب وزنی λ است. اگر مقدار تابع هدف، منفی شود بدین معنی است که پرتفوی کنونی دارای حداقل ریسک نبوده و پرتفوی با ضریب وزنی λ ریسک کمتری را به همراه دارد، پس پرتفوی کنونی کارا نیست. ولی اگر مقدار تابع هدف صفر شود یعنی پرتفوی کنونی دارای حداقل ریسک بوده و می‌توان گفت که کارا است. رابطهٔ ۱۸ را می‌توان با افزودن سناریوی جدید به عنوان سناریوی آشفتگی نیز حل نمود. رابطهٔ ۱۹، بیانگر بررسی کارایی در حالت آشفته است:

رابطهٔ ۱۹)

$$\varepsilon_t = \sum a_s$$
$$s.t$$
$$CVAR(-\sigma'(t)\lambda) - CVAR(-\sigma'(t)w) \le a_s$$
$$s = 1,2,\ldots,S$$

در رابطهٔ ۱۹ نیز اگر تابع هدف منفی شود به معنای ناکارا بودن پرتفوی با ضریب وزنی w و در صورت صفر شدن به معنای کارا بودن پرتفوی با ضریب وزنی w است.

بررسی کارایی پرتفوهای به‌دست آمده از مدل ثابت (غیرآشفته) با هدف کمینه نمودن ریسک

با حل رابطهٔ ۱۸، برای ۶ شاخص منتخب بورس اوراق بهادار، بردار وزنی λ به صورت زیر به‌دست آمد:

رابطهٔ ۲۰) $\lambda = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ )$

حاصل تفریق دو مقدار CVaR برای پرتفوی به‌دست آمده با ضریب وزنی λ و پرتفوی موجود با ضریب وزنی w، ۹۳۳۴۴/۳- شد، پس می‌توان نتیجه گرفت که پرتفوی مورد نظر برای تست، ناکارا است، زیرا پرتفویی با ترکیب رابطهٔ ۲۰، دارای مقدار ریسک کمتری است. مراحل انجام شده تست کارایی برای ضرایب اطمینان ۰/۹۹ و ۰/۹۰ نیز تکرار شد، با این تفاوت که مقدار λ طبق رابطهٔ ۲۰، در نظر گرفته و تفاضل ارزش در معرض ریسک شرطی را به‌دست آوردیم. برای ضریب اطمینان ۰/۹۰ مقدار تابع هدف برابر با ۳۳۶۰۵/۲- و برای ضریب اطمینان ۰/۹۹ تابع هدف برابر با ۳۳۵۹۵۵- شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود برای ضرایب اطمینان ۰/۹۹ و ۰/۹۰ نیز تفاضل CVaRها منفی شده است. این بدین معناست که پرتفوهای موجود ناکارا بوده و پرتفوی (0 0 1 0 0 0) غالب است.

تست کارایی پرتفوی با افزودن سناریوی جدید

در قسمت قبل به بررسی کارایی پرتفوی در حالت ثابت و یا غیرآشفته پرداختیم و پرتفوی غالب به‌دست آمده دارای ترکیبی مطابق رابطهٔ ۲۰ بود. حال در این قسمت پرتفوی با ترکیب به‌دست آمده به عنوان پرتفوی موجود در نظر گرفته و مقادیر خرداد ۹۲ را به عنوان سناریوی آشفتگی وارد مدل خواهیم کرد. هدف این است که ببینیم آیا پرتفوی همچنان کارا خواهد بود؟ نتایج حل مدل در جداول۳ و ۴، ارائه شده است.

جدول۳. مقادیر تابع هدف در تست کارایی با افزودن سناریوی آشفتگی

t	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
fmin	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول ۴. مقادیر وزنی هریک از دارایی ها در تست کارایی با افزودن سناریوی آشفتگی

t	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
شاخص کل	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
شاخص بازار اول	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
شاخص بازار دوم	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
شاخص صنعت	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
شاخص ۵۰ شرکت برتر	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
شاخص شناور آزاد	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

با توجه به نتایج به‌دست آمده از حل برنامه‌ریزی خطی، با افزودن سناریوی جدید به مدل، مقدار تابع هدف برابر با صفر شده است که به معنای کارا بودن ترکیب (0 0 0 1 0 0) است. مقادیر وزنی به‌دست آمده در جدول۴، نیز نشان‌دهنده این امر است، نتیجه‌ای که در حالت غیرآشفته نیز به آن رسیدیم.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش به‌منظور بررسی استواری پرتفوی از تکنیک آشفتگی مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی استفاده شده است. چرا که همواره در مدل‌های بهینه‌سازی پرتفوی، به دلیل تخمین پارامترهای ورودی با مقدار قابل ملاحظه‌ای از ریسک تخمین و عدم قطعیت مواجه هستیم. از اینرو فرض شد که توزیع احتمال بازده دچار نوسان شده و اثرات این نوسان بر روی پرتفوی انتخابی بررسی شد. از تابع ارزش در معرض خطر شرطی برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی استفاده شد. در این بررسی مشخص شد که احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی، بر روی مقدار تابع ارزش در معرض ریسک شرطی اثرگذار است و برای مدیریت ریسک در تکنیک آشفتگی، لازم است رفتار تابع ریسک، نسبت به مقادیر مختلف t بررسی شود.

افزودن سناریوی آشفتگی به مدل میانگین- CVaR موجب پرش و افزایش ناگهانی در تابع ریسک شد، در این حالت استراتژی‌ای مناسب است که موجب شود احتمال افزایش ریسک به کمترین مقدار خود برسد و برای ضرایب اطمینان مختلف تحلیل مختلفی قابل ارائه است: با ضریب اطمینان ۰/۹۵، با افزایش مقدار t در بازه [۰/۷،۰/۹] مقدار ارزش در معرض ریسک شرطی به ناگاه افزایش پیدا کرد. بنابراین برای مدیریت ریسک پرتفوی در این حالت، احتمال

انتخاب سناریوی آشفتگی نباید خیلی زیاد شود. با ضریب اطمینان ۰/۹۹، هنگامی که t مقدار ۰/۵ را گرفت، میزان ریسک به ناگاه افزایش پیدا نمود. در واقع احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی یا باید خیلی کم و یا خیلی زیاد باشد چون اگر سناریوی آشفتگی با همان احتمال سناریوهای اولیه انتخاب شود، میزان ریسک را تا حد قابل توجهی افزایش خواهد داد و در نهایت در ضریب اطمینان ۰/۹۰ مقدار ریسک پرتفوی در فاصله ۰/۳ تا ۰/۸ روندی یکنواخت داشت که بهتر است احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی نیز در همین محدوده باشد.

احتمال انتخاب سناریوی آشفتگی، بر روی مقدار زیان پرتفوی نیز اثرگذار بوده و می‌توان با توجه به مقدار محدودیتی که برای تابع ریسک گذاشته می‌شود، رفتار تابع زیان را کنترل نمود. با بررسی انجام شده برای مقادیر مختلف ریسک، مشاهده شد که با افزایش محدودیت ریسک، رفتار زیان حالت پایدارتر و یکنواخت تری را پیدا می‌کند.. ایجاد کران‌های آشفتگی به میزان قابل توجهی به نوع تابع ریسک و خواص آن از جمله مقعر بودن آن، در متغیر نوسان‌دهنده t بستگی دارد.

در نهایت تست کارایی پرتفوی انجام شد و نتیجه این بود که تمامی پرتفوهای به‌دست آمده دارای حداقل ریسک نبوده و پرتفوی با ترکیب (۰۰۱۰۰۰) بر تمامی پرتفوهای موجود غالب بوده و دارای ریسک کمتری است.

در مقایسه با پژوهش‌های صورت گرفته در این حوزه، مدل پیشنهادی در این مقاله همراستا با پژوهش دوپاکوا (۲۰۰۶) در استفاده از معیار CVaR عمل کرده است و در زمینه ارزیابی استواری پرتفوی پیشنهادی، مؤید رویکرد استفاده شده توسط دمیگول و نوگالس (۲۰۰۹) است. همانطور که در پیشینهٔ پژوهش اشاره شد، دوپاکوا (۲۰۱۲ و ۲۰۱۳) از آزمون تصادفی مرتبهٔ اول و دوم برای ارزیابی کارایی پرتفوی استفاده کرد ولی در این پژوهش با بکارگیری تکنیک آشفتگی، درجهٔ سهولت اجرای مدل و عملیاتی نمودن خروجی به میزان قابل توجهی بهبود یافت.

همانطور که اشاره شد در این پژوهش با استفاده از تکنیک آشفتگی، تنها به بررسی استواری پرتفوی پرداخته شد در صورتی که توصیه می‌شود بهینه‌سازی استوار بکار گرفته شود و علاوه بر بازده، بردار تصادفی سایر پارامترهای مدل بهینه‌سازی پرتفوی نیز لحاظ شود.

References

Bertsimas, D., & Browny, D.(2007). Theory and Applications of Robust Optimization.Constantine Caramanisz.July 6.

Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The Price of Robustness. Operations Research, 52(1), 35–53.

Black, F., & Litterman, F. (1991). Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium. Journal of Fixed Income, September, 7–18.

Chopra, V. K., & Ziemba, T. (1993).The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice No Access, Journal of Portfolio Management 19(2), 6-11.

DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2009). Portfolio Selection with Robust Estimation. OR, 57(3), 560–577.

Dupačová, J., & Kopa, M. (2012). Robustness in Stochastic Programs with Risk Constraints. Annals of Operations Research, 200(1), 55–74.

Dupacova, J. S.(2006). Tress Testing Via Contamination.Charles University, Faculty of Mathematics and Physics.

Dupacova, J., & Kopa, M. (2013). Robustness of Optimal Portfolios Under Risk and Stochastic Dominance Constraints.

Dupacova, J.(2008). Risk Objectives in Two-stage Stochastic Programming Models. Kybernetika, 44(2), 227-242.

Dupacova, J., & Polivka, J. (2005). Stress Testing for VAR and CVAR. Probability and Math. Statistics, Charles University, Prague, Czech Republic.

Ghahtarani, A., & Najafi, A. (2013). Robust Goal Programming for Multi-objective Portfolio Selection Problem. Economic Modelling ,33(C), 588–592.

Green, R. C., & Hollifield, B. (1992). When Will Mean-variance Efficient Portfolios be Well Diversified?. Journal of Finance,47(5), 1785-1809.

Gregory, ch., Darby, K., & Mitra, G. (2011). Robust Optimization and Portfolio Selection. The Cost of Robustness. Oper Res, 212(2), 417-428.

Kopa, M. (2010). Measuring of Second–order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency. Kybernetika, 46(3), 488-500.

Kopa, M., & Chovanec, P. (2008), A second–oderstochasticdominance portfolioefficiencymeasure. Kybernetika, 4(2), 243-258.

Kushch, P.(2012). Portfolio optimization with robust Mean-Variance and Mean-Conditional Value at Risk strategies. Spring. Umea University.Department of Economics Degree project, 30 hp

Lee, S. M., & Chesser, D. L. (1980). Goal programming for portfolio selection. The Journal of Portfolio Management, 6(3), 22-26.

Markowits, H. (1952). portfolio selection. Therand corporation. The Journal of Finance, Vol. 7(1), pp. 77-91.

Michaud, R. (2008). Estimation Error and Portfolio Optimization: A Resampling Solution. Journal of Invesrment Management, 6(1), 8–28.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value at risk.Journal of risk.spring, 2(3), 21-41.

Salahi, M., Mehrdoust, F., & Piri, F. (2013). CVaR Robust Mean-CVaR Portfolio Optimization. International Scholarly Research Notices, 2013(1), Article ID 570950, 9 pages.

Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Oper. Res. 21(5) 1154–1157

Zymler, S., Rustem, B., & Kuhn, D. (2011). Robust portfolio optimization with derivative insurance guarantees.Oper. Res, 210(2), 410– 424.