

## قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل مارکف رژیم متغیر با پرش‌های نامتناهی

علی فروش باستانی<sup>۱</sup>، خسرو صافی<sup>۲</sup>

**چکیده:** این مقاله یک جواب تقریبی با استفاده از روش تفاضل متناهی برای قیمت‌گذاری اختیارهای آمریکایی تحت مدل مارکف رژیم متغیر با پرش‌های نامتناهی در وضعیت اقتصادی ارائه می‌کند. می‌توان با استفاده از حسابان ایتو نشان داد که قیمت اختیار آمریکایی تحت این مدل در یک دستگاه با معادله دیفرانسل انتگرالی جزئی (PIDEs) صدق می‌کند، به طوری که برای هر یک از این معادله‌ها یک مرز اجرای زود هنگام (بهینه) متناظر شده است. پس از تعمیم این معادله به کل ناحیه هدف با استفاده از فرآیند سود تقسیمی، یک طرح عددی جدید به دست خواهیم آورد. نتایج عددی به دست آمده نشان‌دهنده دقت و سازگاری این طرح عددی است. در پایان به برخی از کاربردهای روش ارایه شده به‌ویژه ریسک اعتباری اشاره خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی، فرآیند پرش محض، روش تفاضل متناهی، فرآیند رژیم متغیر.

JEL: G00, G13

۱. استادیار گروه ریاضیات مالی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران  
۲. کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۳۱  
نویسنده مسئول: علی فروش باستانی  
نحوه استناد به این مقاله: فروش باستانی، ع.، و صافی، خ. (۱۳۹۶). قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل مارکف رژیم متغیر با پرش‌های نامتناهی. فصلنامه مدلسازی ریسک و مهندسی مالی، ۲(۲)، ۱۳۳-۱۵۷.

**مقدمه**

در طول چهار دهه گذشته، پژوهش‌های بسیاری در خصوص توسعه و استفاده از مدل‌های گوناگون سازگار با واقعیت بازار و معرفی و بهبود تکنیک‌های بسیار برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار، در حوزه دانشگاهی و در نهادها و مؤسسه‌های مالی مرتبط انجام شده است. نخستین کار بنیادی که در این حوزه می‌توان به آن اشاره کرد، کار مشترک بلک-شولز (۱۹۷۳) و مرتون (۱۹۷۳) است. در مدل آن‌ها فرض شده است که دینامیک دارایی پایه از فرآیند برآونی هندسی پیروی می‌کند. بر اساس پژوهش‌های بسیاری از جمله کلارک (۱۹۷۳)، می‌توان نشان داد که حرکت برآونی با ضرایب تلاطم و رانش ثابت از دقت کافی برای توصیف بازده دارایی پایه برخوردار نیست. دلیل این امر را می‌توان در برخی از ویژگی‌ها همچون دم کلفت توزیع بازده، چولگی منفی و لبخند تلاطم که در داده‌های تجربی بازار دیده می‌شود دانست، درحالی‌که نمی‌توان چنین ویژگی‌هایی را در فرآیند برآونی هندسی مشاهده کرد. به منظور سازگاری هرچه بیشتر با داده‌های واقعی، مدل‌های تصادفی زیادی همچون مدل پخش-پرش مرتون (۱۹۷۶) که فرآیند پرش (فرآیند پواسون) را به حرکت برآونی اضافه کرده است و یا مدل هستون (۱۹۹۳) که ضریب تلاطم حرکت برآونی را یک فرآیند بازگشت به میانگین هم‌بسته در نظر گرفته است، معرفی شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در این میان مدن، کار و چانگ (۱۹۹۸) فرآیند واریانس گاما که تعمیمی از حرکت برآونی با رانش بود را برای مدل‌سازی دینامیک بازده دارایی پایه معرفی کردند. جایگزینی زمان حرکت برآونی با فرآیند گاما این امکان را به مدل می‌دهد که تنها با استفاده از سه پارامتر موجود در مدل، کمیت‌های کشیدگی و چولگی در بازده‌های روزانه را کنترل کرده و در عین حال منحنی لبخند را در داده‌های تلاطم ضمنی برازش کند. فرآیندهای تصادفی یاد شده همچون حرکت برآونی، فرآیند پخش-پرش و حرکت برآونی با تلاطم تصادفی را می‌توان در یک دسته کلی‌تر با عنوان فرآیندهای لوی رده‌بندی کرد. ویژگی مهم این فرآیندها را می‌توان در مانایی و مستقل بودن نمو‌های آن‌ها دانست، بنابراین فرآیندهای لوی همگن زمانی هستند. کونیکوف و مدن (۲۰۰۲) نشان دادند که رفتار ساختار دوره‌ای گشتاورهای فرآیندهای لوی با گشتاورهای تجربی تطابق ندارد. همچنین آن‌ها مستندات تجربی برای نسبت به زمان ناهمگن بودن بازده دارایی‌هایی که بر پایه فرآیندهای لوی مدل شده‌اند ارائه دادند. در این راستا آن‌ها فرآیند واریانس گامای مدل شده با زنجیر مارکف (با دو حالت) را معرفی کردند. نتایج تجربی به دست آمده توسط کونیکوف و مدن (۲۰۰۲) نشان می‌داد که زنجیر مارکف پایه باید بیشتر از دو حالت داشته باشد،

اما روشی که آن‌ها برای قیمت‌گذاری انتخاب کرده بودند به آسانی نمی‌توانست به یک حالت کلی‌تر با حالت دلخواه تعمیم داده شود.

الیوت و اوزاکوه (۲۰۰۶) فرآیندهای پرش محض مدل شده با زنجیر مارکفی با حالت دلخواه را معرفی و با استفاده از تبدیل اشر، یک اندازه ریسک خنثی برای این فرآیندها به دست آوردند. از آنجا که اندازه ریسک خنثی به دست آمده یکتا نیست، بازار مدل شده با این فرآیندها ناکامل اما بدون آربیتراژ خواهد بود. پژوهش‌ها درخصوص سازگاری هرچه بیشتر مدل‌های تصادفی با واقعیت بازارهای سرمایه ادامه دارد. در این میان می‌توان به پژوهش‌های کای و کو (۲۰۱۲) که از فرآیند فوق‌نمایی برای پرش‌های مدل پخش-پرش استفاده کرده‌اند، اشاره کرد. چالش بزرگی که علاوه بر تعداد حالت‌های زنجیر مارکف وجود داشت، قیمت‌گذاری قراردادهای اختیاری آمریکایی است که به واسطه امکان اجرای زود هنگام این قرارداد، به دست آوردن یک جواب تحلیلی برای آن تاکنون غیرممکن بوده است. دلیل این امر آن است که تصمیم به اجرای زود هنگام باید به عنوان بخشی از جواب مسأله قیمت‌گذاری به دست آید. در پیشینه معادلات دیفرانسیل می‌توان این مسأله را با عنوان مسأله مرز آزاد یا مسأله توقف بهینه در نظر گرفت. بنابراین تلاش‌های بسیاری با تکنیک‌های مختلف برای تقریب جواب ارزش اختیاری آمریکایی صورت گرفته است. از جمله این تکنیک‌ها می‌توان به روش‌های شبیه‌سازی (بوچارد و وارین، ۲۰۱۲)، روش‌های درخت دو یا چند جمله‌ای (جیانگ و دای، ۲۰۰۴)، روش توابع پایه شعاعی (باستانی، احمدی و دمیرچی، ۲۰۱۳)، روش فوریه گامی زمانی (جایمونگال و سورکوف، ۲۰۱۱) و تکنیک تصادفی کار (۱۹۹۸) که توسط بویارچنکو و لوواندوروسکی (۲۰۰۹) به کار گرفته شده، اشاره کرد.

در این مقاله، با انتخاب مدل واریانس گامی مدل شده با زنجیر مارکف با حالت دلخواه به عنوان دینامیک دارایی پایه در مسأله قیمت‌گذاری اختیاری آمریکایی، از روش تفاضلات متناهی برای حل این مسأله استفاده شده است که این الگوریتم قابل تعمیم به فرآیندهای CGMY مدل شده با زنجیر مارکف برای قیمت‌گذاری اختیاری آمریکایی نیز هستند (کار، جی‌من، مدن و یور، ۲۰۰۲). پس از معرفی مختصر مدل واریانس گاما مدل شده با زنجیر مارکف، در بخش دوم این پژوهش برای نخستین بار یک دستگاه برای قیمت‌گذاری اختیاری آمریکایی تحت مدل یاد شده ارائه شده که به دلیل حجم زیاد مطالب از ارائه جزئیات بیشتر امتناع شده است. در بخش سوم با توجه به دشواری مرز آزاد مسأله اختیاری آمریکایی، از فرآیند سود تقسیمی به منظور تعمیم دستگاه معادلات به کل ناحیه هدف استفاده شده است. در بخش چهارم این پژوهش، ابتدا به دلیل تکنیکی موجود در اندازه پرش فرآیند واریانس گاما از تکنیک‌های عددی بهره گرفته شده و در ادامه از روش تفاضلات متناهی برای حل دستگاه معادلات اصلاح شده استفاده شده است. در

بخش پایانی نیز با ارائه مثال‌هایی، به راستی‌آزمایی ره‌یافت ارائه شده و به کاربردهای بیشتری از آن در سایر مسائل مالی پرداخته شده است.

### **پیشینه پژوهش**

یکی از ابتدایی‌ترین و پرکاربردترین روش‌های عددی به‌کار گرفته شده برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار آمریکایی، روش تفاضلات متناهی است که در سال‌های اخیر همچنان با بهبود و تعمیم این روش مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران بوده است. از جمله پژوهش‌های صورت گرفته در سال‌های اخیر می‌توان به خلیق و لیو (۲۰۰۹)، کوون و لی (۲۰۱۱) و لی (۲۰۱۴) در این زمینه اشاره کرد.

پیشینه قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی با استفاده از روش تفاضل متناهی را می‌توان در پژوهش برنان و شوارتز (۱۹۷۸) یافت. آن‌ها با مقایسه ارزش اختیار اروپایی و تابع بازده در هر گام زمانی، معادله بلک-شولز را برای اختیار آمریکایی به‌کار گرفتند. با این وجود، با توجه به این‌که مرز اجرای زود هنگام در هر گام زمانی به‌طور دقیق برآورد نمی‌شود، این روش از دقت کافی برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی برخوردار نیست. تاکنون روش‌های بسیاری برای بهبود این نقص ارائه شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به روش تنزیل متوالی تصویر شده<sup>۱</sup> اشاره کرد که از یک الگوریتم تکراری برای شناسایی دقیق مرز بهره‌می‌گیرد (ویل‌موت، هوویسون و دوین (۱۹۹۵).

نیلسن، اسکاوهاگ و تویتو (۲۰۰۲) با اضافه کردن جمله جریمه پیوسته به معادله بلک-شولز توانستند مرز آزاد اختیار آمریکایی را حذف کنند. خلیق و لیو (۲۰۰۹) توانستند با تعمیم جمله جریمه به مدل حرکت برآونی هندسی مدل شده با فرآیند مارکوفی در حالت دلخواه، این اختیار را تحت این مدل قیمت‌گذاری کنند. کوخال (۲۰۰۱) توانست با ارزیابی فرآیند سود تقسیمی کار، ژارو و ماینی (۱۹۹۲) برای فرآیند پخش-پرش یک معادله دیفرانسیل جزئی انتگرالی مستقل از مرز آزاد برای اختیار آمریکایی به‌دست آورد. هیرسا و مدن (۲۰۰۴) نیز با تعمیم فرآیند سود تقسیمی کوخال (۲۰۰۱) برای فرآیند واریانس گاما، ارزش اختیار آمریکایی را تحت مدل واریانس گاما با استفاده از روش تفاضل متناهی به‌دست آوردند. در این مقاله ما با توسعه ره‌یافت هیرسا و مدن (۲۰۰۴) برای مدل واریانس گامای مدل شده با فرآیند مارکوفی در حالت اقتصادی، به قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی خواهیم پرداخت.

---

1. Projected Successive Over-relaxation (PSOR)

## روش‌شناسی پژوهش

### دینامیک دارایی پایه

در این بخش دینامیک دارایی پایه  $S$  (مانند یک سهام ریسکی) را برای قیمت‌گذاری اختیارات در افق زمانی  $[0, t]$  که  $t \in (0, \infty)$  را به کمک یک فرآیند تصادفی پیوسته زمان مدل خواهیم نمود.

فرض کنید که وضعیت بازار دارایی پایه توسط فرآیند  $\alpha = \{\alpha_t, t \geq 0\}$  که یک زنجیر مارکف پیوسته زمان با تعداد وضعیت متناهی است، مدل شده است. باید یادآور شد که  $\alpha$  روی فضای احتمالاتی  $(\Omega, F, P)$  تعریف شده است، به طوری که  $P$  اندازه احتمال دنیای واقعی و  $F$  یک فیلتر طبیعی کامل نسبت به  $P$  تولید شده توسط زنجیر  $\alpha$  است.

همان‌طور که الیوت و سیو (۲۰۱۳) اشاره کرده‌اند، فضای حالت  $\alpha$  می‌تواند مجموعه بردارهای یک  $N$  بعدی  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  باشد، که  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^N$  است.

برای زنجیر  $\alpha$ ، ماتریس نرخ انتقال  $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,N}$  وجود دارد که در آن  $a_{i,j}$  اعداد ثابتی هستند که شدت انتقال زنجیر مارکف از حالت  $e_j$  به  $e_i$  را نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که برای هر  $i \neq j$ ،  $a_{i,j} \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^N a_{i,j} = 0$  و در نتیجه خواهیم داشت  $a_{i,i} \leq 0$ . می‌توان نشان داد که اگر  $p_i = E[\alpha_t] \in \mathbb{R}^N$  باشد، رابطه ۱ را خواهیم داشت.

$$\frac{dp_t}{dt} = Ap_t \quad \text{رابطه ۱}$$

بنابراین براساس کار الیوت و سیو (۲۰۱۳)، دارای دینامیک شبه مارتینگل به صورت رابطه ۲، خواهد بود.

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t A \alpha_u du + M_t \quad \text{رابطه ۲}$$

که در آن  $M_t$  یک  $(F, P)$ -مارتینگل است.

### فرآیندهای تبعی

در کنار فرآیندهایی همچون پخش-پرش که با فرآیند مارکفی مدل شده‌اند و به‌عنوان دینامیک دارایی پایه استفاده می‌شوند، دسته‌ای دیگر از فرآیندهای لوی مدل شده با نام فرآیندهای تبعی وجود دارند. در واقع این فرآیندها حرکت برآونی با رانشی هستند که در یک مقیاس زمانی

تصادفی مشاهده می‌شوند (کونت و تانکوف، ۲۰۰۳). تفسیر اقتصادی فرآیندهای تبعی را می‌توان در یکسان نبودن زمان سپری شده برای معاملات بیان کرد. در حرکت برآونی، طول گام‌های زمانی یک عدد ثابت در نظر گرفته می‌شود در حالی که در فرآیندهای تبعی طول گام‌های زمانی تصادفی است. از جمله فرآیندهای تبعی شناخته شده می‌توان به فرآیندهای واریانس گاما (VG) و معکوس گاوسی نرمال (NIG) اشاره کرد که زمان‌های این فرآیندها به ترتیب از فرآیندهای گاما و گامای معکوس پیروی می‌کنند. در ادامه به بررسی فرآیند واریانس گاما به منظور استفاده در مسأله قیمت‌گذاری خواهیم پرداخت.

یک حرکت برآونی با رانش  $\theta$  و واریانس  $\sigma$  به فرم رابطه ۳ را در نظر می‌گیریم.

$$b(t; 1, \nu) = \theta t + \sigma W(t) \quad \text{رابطه ۳}$$

همچنین فرآیند گامای  $\gamma(t; 1, \nu)$  با نمو‌های مستقل در بازه‌های زمانی بدون اشتراک  $(t+h, t)$  را نظر می‌گیریم که نمو  $g = \gamma(t+h; 1, \nu) - \gamma(t; 1, \nu)$  دارای توزیع گاما با میانگین  $h$ ، واریانس  $\nu h$  و تابع چگالی طبق رابطه ۴ است و در آن  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما است.

$$f_h(g) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{h}{\nu}} \frac{g^{\frac{h}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{1}{\nu}g\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\nu}\right)} \quad \text{رابطه ۴}$$

حال می‌توان فرآیند واریانس گاما را به عنوان یک حرکت برآونی که زمان تصادفی با فرآیند  $\gamma$  تبعیت می‌کند به صورت رابطه ۵، تعریف کرد.

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = b(\gamma(t; 1, \nu); 1, \nu) \quad \text{رابطه ۵}$$

تابع مشخصه فرآیند واریانس گاما تعریف شده با ضابطه  $\Phi_{X(t)}(u) = E[\exp(iux(t))]$  را می‌توان به صورت امید شرطی روی زمان  $\gamma$  به صورت رابطه ۶، به دست آورد.

$$\Phi_{X(t)}(u) = \left(1 / \left(1 - i\theta\nu u + \left(\frac{\sigma^2\nu}{2}\right)u^2\right)\right)^{\frac{t}{\nu}} \quad \text{رابطه ۶}$$

با تعریف رابطه ۷، رابطه ۸ را به دست می‌آوریم.

$$\lambda_n = 1 / \left(\sqrt{\frac{\sigma^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} - \frac{\theta\nu}{2}\right), \quad \lambda_p = 1 / \left(\sqrt{\frac{\sigma^2\nu^2}{4} + \frac{\sigma^2\nu}{2}} + \frac{\theta\nu}{2}\right) \quad \text{رابطه ۷}$$

رابطه ۸

$$\Phi_{X(0)}(u) = \left( 1 / \left( 1 - i\theta v u + \left( \frac{\sigma^2 v}{2} \right) u^2 \right) \right)^{\frac{t}{v}} = \left( 1 - \frac{i u}{\lambda_p} \right)^{\frac{t}{v}} \left( 1 + \frac{i u}{\lambda_n} \right)^{\frac{t}{v}}$$

حال به منظور مشخص کردن سه تایی لوی (ضریب رانش، ضریب تلاطم و اندازه پرش) فرآیند واریانس گاما بنابر قضیه لوی-خینچین می توان تابع مشخصه فرآیند را به صورت رابطه ۹ نوشت.

$$E[\exp(iuY(t))] = \exp(t\phi(u)) \quad \text{رابطه ۹}$$

که در آن رابطه ۱۰،  $\sigma > 0$ ، برقرار است.

$$\phi(u) = i u b - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 - \int_R (e^{i u x} - 1 - i u x I_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx) \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در این رابطه  $\nu(dx)$  یک اندازه سیگما-متناهی با  $\nu(\{0\}) = 0$  و  $\int_R (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$

خواهد بود. همچنین  $\sigma > 0$  و  $b$  اعداد حقیقی هستند. حال می توان رابطه ۱۱ را نشان داد.

رابطه ۱۱

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{i u}{\lambda_p} \right)^{-\frac{t}{v}} \left( 1 + \frac{i u}{\lambda_n} \right)^{\frac{t}{v}} \\ &= \exp \left( \frac{t}{v} \int_0^\infty (e^{i u x} - 1) \frac{e^{-\lambda_p x}}{x} dx \right) \exp \left( \frac{t}{v} \int_{-\infty}^0 (e^{i u x} - 1) \frac{e^{-\lambda_n |x|}}{|x|} dx \right) \\ &= \left( t \int_R (e^{i u x} - 1) \nu(dx) \right) \\ &= \exp \left( \frac{t}{v} \int_0^\infty (e^{i u x} - 1) \frac{e^{-\lambda_p x}}{x} dx \right) \exp \left( \frac{t}{v} \int_0^\infty (e^{-i u x} - 1) \frac{e^{-\lambda_n x}}{x} dx \right) \\ &= \exp \left( t i u \theta + t \int_R (e^{i u x} - 1 - I_{\{|x| \leq 1\}}) \nu(dx) \right) \end{aligned}$$

با انتخاب  $k(x) dx = \nu(dx)$  به عنوان چگالی پرش به صورت رابطه ۱۲ و با برابری

$\theta = b$  به عنوان ضریب رانش فرآیند به صورت رابطه ۱۳، سه تایی لوی برای فرآیند واریانس گاما برابر  $(\theta, 0, \nu)$  خواهد بود و این امر نشان می دهد که این فرآیند یک فرآیند پرش محض است.

رابطه ۱۲

$$k(x) = \frac{e^{-\lambda_p x}}{x} I_{\{x > 0\}} + \frac{e^{-\lambda_n |x|}}{|x|} I_{\{x < 0\}}$$

$$\theta = \int_0^1 \frac{e^{-\lambda_p x}}{v} dx + \int_{-1}^0 \frac{e^{-\lambda_n |x|}}{-v} dx \quad (\text{رابطه ۱۳})$$

همانطور که پیش تر اشاره شد، فرآیند واریانس گاما توسط سه پارامتری که ما فرض کرده ایم وابسته به وضعیت  $\alpha$  بازار دارایی پایه است توصیف می شود.

$$\text{I. } \sigma = \{\sigma_t, t \geq 0\} \text{ تلاطم حرکت برآونی،}$$

$$\text{II. } v = \{v_t, t \geq 0\} \text{ نرخ واریانس تغییر زمان گاما،}$$

$$\text{III. } \theta = \{\theta_t, t \geq 0\} \text{ رانش حرکت برآونی.}$$

برای این منظور، سه بردار  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ ،  $v = (v_1, \dots, v_N)$ ،  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  وجود دارد، به طوری که رابطه ۱۴ را خواهیم داشت.

$$\sigma_t = \langle \sigma, \alpha_t \rangle \quad (\text{رابطه ۱۴})$$

$$v_t = \langle v, \alpha_t \rangle$$

$$\theta_t = \langle \theta, \alpha_t \rangle$$

که در آن عملگر  $\langle \dots \rangle$  نشان دهنده ضرب داخلی بین دو بردار است.

### قیمت گذاری اختیار آمریکایی

نکته ای که باید ابتدا به آن توجه کنیم این است که بازار توصیف شده توسط دینامیک  $S_t = S_0^X$  در بخش قبل (فرآیند پرش محض مدل شده با زنجیر مارکف) یک بازار ناکامل است، به بیان دقیق تر بیش از یک اندازه ریسک خنثی برای این مدل ها می تواند وجود داشته باشد. الیوت و چان و سی یو (۲۰۰۶) تعمیمی از تبدیل اشر را برای انتخاب یک اندازه مارتینگل معادل  $Q$  (اندازه ریسک خنثی) برای قیمت گذاری اختیارات تحت مدل یاد شده به کار گرفتند. در حقیقت آنها نشان داده اند که تنزیل دارای پایه  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  با نرخ بدون ریسک  $r$  تحت اندازه ریسک خنثی به صورت رابطه ۱۵ است.

$$E^Q \left[ \hat{S}_t \right] = S_0 \quad (\text{رابطه ۱۵})$$

در رابطه ۱۵،  $E^Q$  نشان دهنده مقدار مورد انتظار تحت اندازه ریسک خنثی  $Q$  است. در ادامه ما اختیار فروش آمریکایی را مورد بررسی قرار می دهیم که ارزش دارایی پایه آن  $S_t$ ، قیمت توافقی آن  $K$  و سررسید آن  $T$  است. با تعریف  $V_T(S, t)$  به عنوان ارزش اختیار در  $0 \leq t \leq T$



قیمت گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل مارکف رژیم متغیر... ۱۴۱

به طوری که  $S_t = S$  و  $\alpha_t = j$ ، با استفاده از اصل قیمت گذاری ریسک خنثی<sup>۱</sup> رابطه ۱۶، برقرار است.

$$V_j(S, t) = \sup_{t \leq \tau^* \leq T} E_{S, t}^Q \left[ e^{-r(\tau^* - t)} (K - S_{\tau^*})^+ \mid S_t = S, \alpha_t = e_j \right] \quad \text{رابطه ۱۶}$$

که در آن  $\tau^*$  یک زمان توقف بهینه خواهد بود. این رابطه فرم مسئله توقف بهینه برای اختیار فروش آمریکایی را بیان می کند. با استفاده از تغییر متغیر  $x = \ln(S)$  و  $\tau = T - t$  و جایگذاری  $V_j(t, S) = W_j(\tau, x)$  می توان نشان داد که  $V_j(S, t)_{j=1, \dots, N}$  در مسئله مرز آزاد با توجه به رابطه ۱۷، صدق می کند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_j}{\partial t}(\tau, x) - LW_j(\tau, x) = 0 \quad \text{if } x > \bar{x}_j(\tau) \\ W_j(\tau, x) = K - e^x \quad \text{if } -\infty < x \leq \bar{x}_j(\tau) \\ W_j(0, x) = (K - e^x)^+ \\ W_j(\tau, x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \\ W_j(\tau, x) \rightarrow K \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \downarrow \bar{x}_j(\tau)} \frac{\partial W_j(\tau, x)}{\partial x} = -1 \\ \bar{x}_j(0) = \log(K) \end{array} \right. \quad \text{رابطه ۱۷}$$

که در آن  $\bar{x}_j(\tau)_{j=1, \dots, N}$  مرزهای اجرای زود هنگام هستند و  $LW_j$  یک عملگر دیفرانسیلی-انتگرالی است که به صورت رابطه ۱۸، تعریف می شود.

$$LW_j(\tau, x) = r \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) + (-r + a_{j,j})W_j(\tau, x) + \sum_{i \neq j}^N a_{j,i}W_i(\tau, x) + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۱۸}$$

باتوجه به ماهیت مسئله اختیار آمریکایی، دستگاه PIDE شرح داده شده در رابطه ۱۸، فقط برای ناحیه نگهداری برقرار است. در ناحیه اجراء ارزش اختیار برابر با تابع بازده است و در نتیجه رابطه ۱۹، برقرار است.

$$W_j(\tau, x) = K - e^x \quad \text{رابطه ۱۹}$$

حال به منظور تعمیم PIDE به کل ناحیه هدف، ارزش تابع اختیار  $\delta_j(x) = \frac{\partial W_j}{\partial t} - LW_j$  را در ناحیه اجرا به دست می آوریم. بدین ترتیب با استفاده از رابطه ۱۸، رابطه ۲۰، به دست می آید.

$$\delta_j(x) = rK - \int_{x_j(\tau)-x}^{\infty} [W_j(x+y, \tau) - (K - e^{x+y})] k_j(y) dy \quad (\text{رابطه } 20)$$

$$- \sum_{i=1}^N a_{j,i} (K - e^x)$$

با کم کردن مقدار  $\delta_j(x)$  از PIDE می توانیم دستگاه جدید را در کل ناحیه هدف حل کنیم. در نتیجه رابطه ۱۷، به صورت رابطه ۲۱، بازنویسی می شود.

$$\begin{cases} \frac{\partial W_j}{\partial t}(\tau, x) - LW_j(\tau, x) - I_{x < x_j(\tau)} \delta_j(x) = 0 & (\text{رابطه } 21) \\ W_j(0, x) = (K - e^x)^+ \\ W_j(\tau, x) \rightarrow 0 & \text{as } x \rightarrow \infty \\ W_j(\tau, x) \rightarrow K & \text{as } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

که در ادامه برای حل این مسأله از روش تفاضلات متناهی استفاده خواهیم کرد.

### روش تفاضلات متناهی

به منظور حل دستگاه رابطه ۲۱، روش تفاضلات متناهی استفاده شده توسط هیرسا و مدن (۲۰۰۴) برای مدل واریانس گاما را توسعه می دهیم. ارزیابی جملات انتگرالی مهم ترین بخش در حل این مسأله است که در ادامه به این مهم خواهیم پرداخت. اندازه لوی  $k_j(y) dy$  در نقطه  $y=0$  تکینگی دارد، از اینرو برای غلبه بر این مشکل، دامنه انتگرال گیری را به دو ناحیه به صورت رابطه ۲۲، تقسیم می کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy \quad (\text{رابطه } 22)$$

$$= \int_{|y| \leq \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy$$

$$+ \int_{|y| > \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy$$

۱۴۳ قیمت گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل مارکف رژیم متغیر... \_\_\_\_\_

با اضافه و کم کردن  $y \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)$  در انتگرال روی ناحیه  $|y| \leq \epsilon$  رابطه ۲۳، به دست

می آید.

$$\int_{|y| \leq \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۲۳}$$

$$= \int_{|y| \leq \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - y \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1 - y) \right] k_j(y) dy$$

رابطه ۲۴، با استفاده از بسط مک لورن به دست می آید.

$$W_j(\tau, x+y) = W_j(\tau, x) + y \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) + O(y^3) \quad \text{رابطه ۲۴}$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)$$

رابطه ۲۵، با جاگذاری رابطه ۲۴ در رابطه ۲۳، به دست می آید.

$$\int_{|y| \leq \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - y \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1 - y) \right] k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۲۵}$$

$$= \int_{|y| \leq \epsilon} \left[ \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) - \frac{y^2}{2} \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) + O(y^3) \right] k_j(y) dy$$

$$\approx \frac{1}{2} \sigma_j^2(\epsilon) \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) - \frac{1}{2} \sigma_j^2(\epsilon) \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)$$

به طوری که  $\sigma_j^2(\epsilon)$  به صورت رابطه ۲۶، تعریف می شود.

$$\sigma_j^2(\epsilon) = \int_{|y| \leq \epsilon} y^2 k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۲۶}$$

برای ناحیه  $|y| > \epsilon$ ، رابطه ۲۷ صادق است.

$$\int_{|y| > \epsilon} \left[ W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x)(e^y - 1) \right] k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۲۷}$$

$$= \int_{|y| > \epsilon} (W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x)) k_j(y) dy + \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) \omega_j(\epsilon)$$

که در آن  $\omega_j(\epsilon)$  به صورت رابطه ۲۸، تعریف می شود.

$$\omega_j(\epsilon) = \int_{|y|>\epsilon} (1 - e^y) k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۲۸}$$

حال با استفاده از رابطه‌های به دست آمده، PIDE رابطه ۱۷ را به شکل رابطه ۲۹، بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_j}{\partial \tau}(\tau, x) &= \int_{|y|>\epsilon} [W_j(\tau, x+y) - W_j(\tau, x)] k_j(y) dy \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_j^2(\epsilon) \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) + \left( r + \omega_j(\epsilon) - \frac{1}{2} \sigma_j^2(\epsilon) \right) \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) \\ &+ (a_{j,j} - r) W_j(\tau, x) + \sum_{i \neq j}^N a_{j,i} W_i(\tau, z) + \mathbf{I}_{x < \bar{x}_j(\tau)} \delta_j(x) \end{aligned} \quad \text{رابطه ۲۹}$$

در ادامه برای حل این PIDE، یک گسسته‌سازی روی  $[x_{min}, x_{max}] \times [0, T]$  با طول گام‌های مساوی معرفی می‌کنیم. اعداد مثبت  $M$  و  $N_g$  را در نظر بگیرید، با تعریف  $\Delta \tau = \frac{T-t}{M}$  و  $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_g}$  به عنوان طول گام‌های این گسسته‌سازی، مش بندی رابطه ۳۰ را خواهیم داشت.

$$\begin{cases} x_k = x_{min} + k \Delta x & \text{for } k = 0, \dots, N_g \\ \tau_l = l \Delta \tau & \text{for } l = 0, \dots, M \end{cases} \quad \text{رابطه ۳۰}$$

برای اختصار، در حل معادله، از  $W_j^{l,k}$  به جای  $W_j(\tau_l, x_k)$  استفاده می‌نماییم. همچنین برای تقریب مشتقات، از عبارتهای مرتبه اول، دوم و تفاضل مرکزی به ترتیب برای  $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ ،

$\frac{\partial W}{\partial x}$  و  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  استفاده می‌کنیم و با انتخاب  $\epsilon = \Delta x$  دستگاه معادلات گسسته مطابق رابطه ۳۱ را داریم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \tau} (W_j^{l+1,k} - W_j^{l,k}) &= \frac{\sigma^2(\Delta x)}{2 \Delta x} (W_j^{l+1,k+1} - 2W_j^{l+1,k} + W_j^{l+1,k-1}) \\ &+ (r + \omega_j(\Delta x) - \frac{1}{2} \sigma_j^2(\Delta x)) \frac{1}{2 \Delta x} (W_j^{l+1,k+1} - W_j^{l+1,k-1}) + (a_{j,j} - r) W_j^{l+1,k} \\ &+ \int_{|y|>\Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy \\ &+ \sum_{i \neq j}^N a_{j,i} W_i^{l+1}(z) + \mathbf{I}_{x < \bar{x}_j(d \Delta \tau)} \delta_j^l(x_k) \end{aligned} \quad \text{رابطه ۳۱}$$

به منظور ارزیابی جملات انتگرالی، نیاز است حاصل انتگرال را در ناحیه  $|y| > \Delta x$  مورد بررسی قرار دهیم. برای ناحیه  $y < -\Delta x$ ، اگر  $y > x_0 - x_k = -k\Delta x$ ، کمیت  $x_k + y$  داخل مش بندی قرار می گیرد و برای  $y > \Delta x$ ، اگر  $y < x_{N_g} - x_k = (N_g - k)\Delta x$ ، کمیت  $x_k + y$  داخل مش بندی قرار خواهد گرفت. بنابراین ناحیه  $|y| > \Delta x$  را می توان به چهار زیرناحیه تقسیم کرد که در نتیجه رابطه ۳۱ به صورت رابطه ۳۲، بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} \int_{|y| > \Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy = & \text{رابطه ۳۲} \\ \int_{x_0 - x_k}^{-\infty} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy + & \\ \int_{x_0 - x_k}^{-\Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy + & \\ \int_{x_{N_g} - x_k}^{\Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy + & \\ \int_{x_{N_g} - x_k}^{+\infty} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy & \end{aligned}$$

برای  $y \in (\Delta x, x_{N_g} - x_k)$  رابطه ۳۳ را نوشت.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta x}^{x_{N_g} - x_k} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy = & \text{رابطه ۳۳} \\ \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] \frac{e^{-\lambda_p y}}{\nu y} dy & \end{aligned}$$

به طوری که  $\lambda = \lambda_j$ . با استفاده از درون یابی خطی روی بازه  $[h\Delta x, (h+1)\Delta x]$  عبارت  $W_j(\tau_l, x_k + y)$  را می توان به صورت رابطه ۳۴ نوشت.

$$W_j(\tau_l, x_k + y) \cong W_j^{l, k+h} + \frac{W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h}}{\Delta x} (y - h\Delta x) \quad \text{رابطه ۳۴}$$

بدین ترتیب رابطه ۳۵، حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Delta x}^{x_{N_g} - x_k} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy = \quad \text{رابطه ۳۵} \\
 & \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} \left( W_j^{l, k+h} + \frac{W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h}}{\Delta x} (y - h\Delta x) - W_j^{l, k} \right) \frac{e^{-\lambda_p y}}{v_j y} dy = \\
 & \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \frac{1}{v_j} (W_j^{l, k+h} - W_j^{l, k} - h(W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h})) \left\{ \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} \frac{e^{-\lambda_p y}}{y} dy \right\} \\
 & + \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \frac{W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h}}{v_j \Delta x} \left\{ \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} e^{-\lambda_p y} dy \right\} = \\
 & \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \frac{1}{v_j} (W_j^{l, k+h} - W_j^{l, k} - h(W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h})) \{g_2(h\lambda_p \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_p \Delta x)\} \\
 & + \sum_{h=1}^{N_g - k - 1} \frac{W_j^{l, k+h+1} - W_j^{l, k+h}}{v_j \Delta x \lambda_p} \{g_1(h\lambda_p \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_p \Delta x)\} \\
 & \text{به طریقی مشابه برای } y \in (x_0 - x_k, -\Delta x) \text{ را خواهیم داشت.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_0 - x_k}^{-\Delta x} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j(\tau_l, x_k)] k_j(y) dy \quad \text{رابطه ۳۶} \\
 & = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{v_j} (W_j^{l, k-h} - W_j^{l, k} - h(W_j^{l, k-h-1} - W_j^{l, k-h})) \\
 & \times \{g_2(h\lambda_n \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_n \Delta x)\} \\
 & + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_j^{l, k-h-1} - W_j^{l, k-h}}{v_j \Delta x \lambda_n} \{g_1(h\lambda_n \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_n \Delta x)\} \\
 & \text{به طوری که رابطه ۳۷، صادق است.}
 \end{aligned}$$

$$g_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{-z} dz \quad g_2(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \quad \text{رابطه ۳۷}$$

برای ناحیه  $(-\infty, x_0 - x_k)$  به طور مشابه رابطه ۳۸ را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{x_0 - x_k} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j^{l, k}] \frac{e^{-\lambda_n |y|}}{v_j |y|} dy = \quad \text{رابطه ۳۸} \\
 & \int_{k\Delta x}^{\infty} [W_j(\tau_l, x_k - y) - W_j^{l, k}] \frac{e^{-\lambda_n y}}{v_j y} dy
 \end{aligned}$$

می توان فرض کرد که در این ناحیه  $W_j(\tau_l, x_k - y) = K - e^{x_k - y}$  است و بدین ترتیب رابطه ۳۹، به دست می آید.

$$\begin{aligned} \int_{k\Delta x}^{\infty} [W_j(\tau_l, x_k - y) - W_j^{l,k}] \frac{e^{-\lambda_n y}}{v_j y} dy &= \int_{k\Delta x}^{\infty} [K - e^{x_k - y} - W_j^{l,k}] \frac{e^{-\lambda_n y}}{v_j y} dy \\ &= \frac{1}{v_j} (K - W_j^{l,k}) \int_{k\Delta x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n y}}{y} dy - \frac{1}{v_j} e^{x_k} \int_{k\Delta x}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda_n + 1)y}}{y} dy \\ &= \frac{1}{v_j} \left( (K - W_j^{l,k}) g_2(\lambda_n k \Delta x) - e^{x_k} g_2((\lambda_n + 1)k \Delta x) \right) \end{aligned} \quad \text{رابطه ۳۹}$$

همچنین برای ناحیه  $(x_{N_g} - x_i, \infty)$  می‌توان فرض کرد که  $W_j(\tau_l, x_k + y) = 0$  است و از اینرو رابطه ۴۰، به‌دست می‌آید.

$$\int_{x_{N_g} - x_i}^{\infty} [W_j(\tau_l, x_k + y) - W_j^{l,k}] \frac{e^{-\lambda_p y}}{v_j y} dy = -\frac{1}{v_j} g_2(\lambda_p (N_g - k) \Delta x) W_j^{l,k} \quad \text{رابطه ۴۰}$$

براساس آن‌چه که پیش‌تر اشاره شد، برای ارزیابی جمله انتگرالی  $\delta^l_j(x_k)$  رابطه ۴۱ را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \int_{\bar{x}_j(d\Delta\tau) - x_k}^{\infty} [W_j(\tau_l, x_k + y) - (K - e^{x_k + y})] k_j(y) dy &= \quad \text{رابطه ۴۱} \\ \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} \left( W_j^{l,k+h} + \frac{W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}}{\Delta x} (y - h\Delta x) \right) \frac{e^{-\lambda_p y}}{v_j y} dy \\ - \frac{1}{v_j} \left\{ K \int_{\bar{x}_j(d\Delta\tau) - x_k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_p y}}{y} dy - e^{x_k} \int_{\bar{x}_j(d\Delta\tau) - x_k}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda_p - 1)y}}{y} dy \right\} = \\ \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{1}{v_j} \left( W_j^{l,k+h} - h(W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}) \right) \left\{ \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} \frac{e^{-\lambda_p y}}{y} dy \right\} \\ + \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}}{v_j \Delta x} \left\{ \int_{h\Delta x}^{(h+1)\Delta x} e^{-\lambda_p y} dy \right\} \\ - \frac{1}{v_j} \left\{ K \int_{\bar{x}_j(d\Delta\tau) - x_k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_p y}}{y} dy - e^{x_k} \int_{\bar{x}_j(d\Delta\tau) - x_k}^{\infty} \frac{e^{-(\lambda_p - 1)y}}{y} dy \right\} \\ = \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{1}{v_j} \left( W_j^{l,k+h} - h(W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}) \right) \left\{ g_2(h\lambda_p \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \\ + \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}}{v_j \Delta x \lambda_p} \left\{ g_1(h\lambda_p \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \\ - \frac{1}{v_j} \left\{ K g_2((d-k)\lambda_p \Delta x) - e^{x_k} g_2((d-k)(\lambda_p - 1)\Delta x) \right\} \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن همه این نتایج و بازنویسی رابطه ۳۱، به معادله تفاضلی رابطه ۴۲، برای نقطه  $(x_k, \tau_{l+1})$  دست می‌یابیم.

$$\begin{aligned} & \text{رابطه ۴۲} \quad d_j^{l+1,k} W_j^{l+1,k-1} + b_j^{l+1,k} W_j^{l+1,k} + u_j^{l+1,k} W_j^{l+1,k+1} - \sum_{i \neq j}^N a_{j,i} \Delta \tau W_i^{l+1,k} \\ & = W_j^{l,k} + \frac{\Delta \tau}{v_j} R_j^{l,k} + \Delta \tau I_{x < \bar{x}_j(d\Delta \tau)} H_j^{l,k} \end{aligned}$$

به طوری که رابطه ۴۳، صادق است.

$$\begin{aligned} & \text{رابطه ۴۳} \quad d_j^{l+1,k} = \left( r + \omega_j(\Delta x) - \frac{1}{2} \sigma_j^2(\Delta x) \right) \frac{\Delta \tau}{2\Delta x} - \frac{\sigma_j^2(\Delta x) \Delta \tau}{2\Delta x^2} \\ & u_j^{l+1,k} = - \left( r + \omega_j(\Delta x) - \frac{1}{2} \sigma_j^2(\Delta x) \right) \frac{\Delta \tau}{2\Delta x} - \frac{\sigma_j^2(\Delta x) \Delta \tau}{2\Delta x^2} \\ & b_j^{l+1,k} = \left( 1 + \frac{\sigma_j^2(\Delta x) \Delta \tau}{\Delta x^2} + (r - a_{j,j}) \Delta \tau \right) \\ & + \frac{\Delta \tau}{v_j} \left( g_2(\lambda_n k \Delta x) + g_2(\lambda_p (N_g - k) \Delta x) \right) \\ & R_j^{l,k} = \sum_{h=1}^{k-1} \left( W_j^{l,k-h} - W_j^{l,k} - h(W_j^{l,k-h-1} - W_j^{l,k-h}) \right) \\ & \times \left\{ g_2(h\lambda_n \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_n \Delta x) \right\} \\ & + \sum_{h=1}^{k-1} \frac{W_j^{l,k-h-1} - W_j^{l,k-h}}{\Delta x \lambda_n} \left\{ g_1(h\lambda_n \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_n \Delta x) \right\} \\ & + \sum_{h=1}^{N_g-k-1} \left( W_j^{l,k+h} - W_j^{l,k} - h(W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}) \right) \left\{ g_2(h\lambda_p \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \\ & + \sum_{h=1}^{N_g-k-1} \frac{W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}}{\Delta x \lambda_p} \left\{ g_1(h\lambda_p \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \\ & + K g_2(k\lambda_n \Delta x) - e^{x_k} g_2(k(\lambda_n + 1) \Delta x) \\ & H_j^{l,k} = rK - \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{1}{v_j} \left( W_j^{l,k+h} - h(W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}) \right) \\ & \times \left\{ g_2(h\lambda_p \Delta x) - g_2((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \\ & - \sum_{h=d-k}^{N_g-k-1} \frac{W_j^{l,k+h+1} - W_j^{l,k+h}}{v_j \Delta x \lambda_p} \left\{ g_1(h\lambda_p \Delta x) - g_1((h+1)\lambda_p \Delta x) \right\} \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{V_j} \left\{ Kg_2((d-k)\lambda_p \Delta x) - e^{x_k} g_2((d-k)(\lambda_p - 1)\Delta x) \right\} - \sum_{i=1}^N a_{j,i} (K - e^{x_k})$$

برای حل معادله گسسته رابطه ۳۷، نیاز به استفاده از شرایط مرزی داریم که وابسته به ارزش اختیار در مرز باشد. بدین منظور از شرایط مرزی نیومن که به صورت رابطه ۴۴، تعریف می شود، استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \downarrow -\infty} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) = 0 \quad \forall \tau \quad \text{رابطه ۴۴}$$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2}(\tau, x) - \frac{\partial W_j}{\partial x}(\tau, x) = 0 \quad \forall \tau$$

با گسسته سازی شرط اول نیومن مقدار  $W_j(\tau, x)$  در نقطه  $x_{min}$  را می توان با جایگذاری

$k=0$  در رابطه ۴۵، به صورت رابطه ۴۶، به دست آورد.

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right) W_j^{l+1, k-1} - 2W_j^{l+1, k} + \left(1 - \frac{\Delta x}{2}\right) W_j^{l+1, k+1} = 0 \quad \text{رابطه ۴۵}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right) W_j^{l+1, 0} - 2W_j^{l+1, 1} + \left(1 - \frac{\Delta x}{2}\right) W_j^{l+1, 2} = 0 \quad \text{رابطه ۴۶}$$

$$\Rightarrow W_j^{l+1, 0} = \left(\frac{2}{1 + \frac{\Delta x}{2}}\right) W_j^{l+1, 1} - \left(\frac{1 - \frac{\Delta x}{2}}{1 + \frac{\Delta x}{2}}\right) W_j^{l+1, 2}$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده برای  $W_j^{l+1, 0}$  در رابطه ۴۲، برای  $k=1$  رابطه ۴۷، به دست

می آید.

$$\left(\frac{2}{1 + \frac{\Delta x}{2}} d_j^{l+1, 1} + b_j^{l+1, 1}\right) W_j^{l+1, 1} + \left(u_j^{l+1, 1} - \frac{1 - \frac{\Delta x}{2}}{1 + \frac{\Delta x}{2}} d_j^{l+1, 1}\right) W_j^{l+1, 2} \quad \text{رابطه ۴۷}$$

$$- \sum_{i \neq j}^N a_{j,i} \Delta \tau W_i^{l+1, 1} = W_j^{l, 1} + \frac{\Delta \tau}{V_j} R_j^{l, 1} + \Delta \tau I_{x < \bar{x}_j(d\Delta \tau)} H_j^{l, 1}$$

به طریقی مشابه، برای  $k=N_g - 1$  رابطه ۴۸ را خواهیم داشت.

$$\left(d_j^{l+1, N_g - 1} - \frac{1 + \frac{\Delta x}{2}}{1 - \frac{\Delta x}{2}} u_j^{l+1, N_g - 1}\right) W_j^{l+1, N_g - 2} + \left(b_j^{l+1, N_g - 1} + \frac{2}{1 - \frac{\Delta x}{2}} u_j^{l+1, N_g - 1}\right) W_j^{l+1, N_g - 1} \quad \text{رابطه ۴۸}$$

$$- \sum_{i \neq j}^N a_{j,i} \Delta \tau W_i^{l+1, N_g - 1} = W_j^{l, N_g - 1} + \frac{\Delta \tau}{V_j} R_j^{l, N_g - 1} + \Delta \tau I_{x < \bar{x}_j(d\Delta \tau)} H_j^{l, N_g - 1}$$



$$W^{l+1} = [W_1^{l+1}, W_2^{l+1}, \dots, W_N^{l+1}]^T$$

$$W^l = [W_1^l, W_2^l, \dots, W_N^l]^T$$

$$H^l = [H_1^l, H_2^l, \dots, H_N^l]^T$$

$$R_j^l = [R_1^l, R_2^l, \dots, R_N^l]^T$$

$$AW^{l+1} = W^l + \frac{\Delta\tau}{V_j} R^{l+1} + \Delta\tau \mathbf{I}_{x < \bar{x}_j(d\Delta\tau)} H^l \quad l = 0, 1, \dots, M \quad \text{رابطه ۵۲}$$

$$W^0 = [W_1^0, W_2^0, \dots, W_N^0]^T \quad \text{رابطه ۵۳}$$

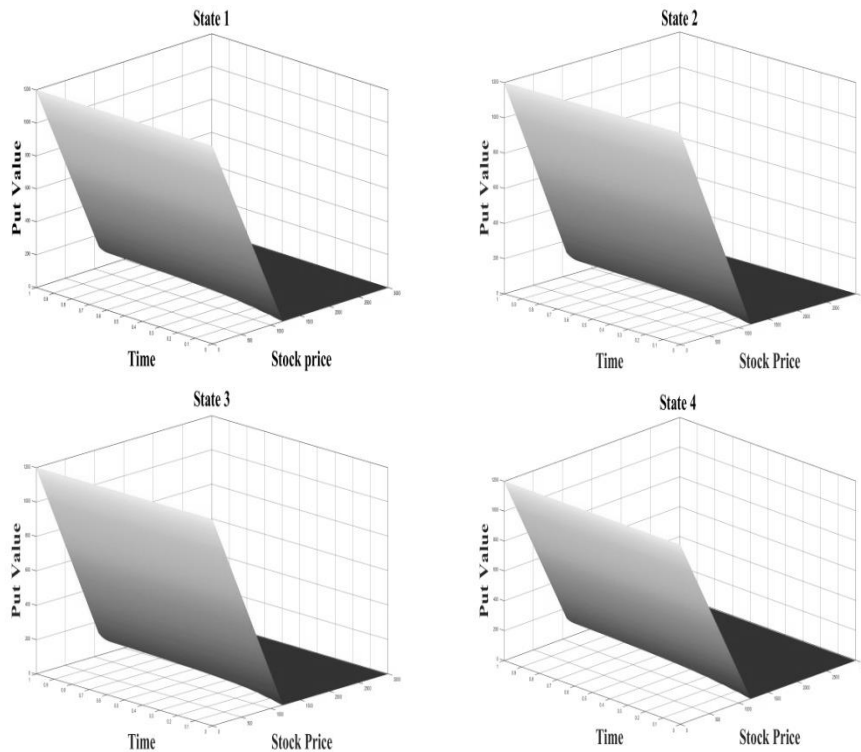
$$W_j^{0,k} = (K - e^{x_k})^+ \quad \text{for } j = 1, \dots, N \quad k = 0, \dots, N_g$$

### یافته‌های پژوهش

در این بخش مثال‌های عددی به منظور بررسی روش عددی معرفی شده در بخش قبل ارائه خواهیم داد. برای این منظور ما از پارامترهای فرضی زیر در مدل واریانس گامای مدل شده با قیمت توافقی  $K = 1200$ ، نرخ بدون بهره  $r = 0.2$  برای قرارداد اختیار فروش آمریکایی با مدت قرارداد  $\tau = 1$  استفاده خواهیم کرد.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.20 \\ 0.19 \\ 0.18 \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.30 \\ -0.32 \\ -0.35 \end{pmatrix} \nu = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.55 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} -0.55 & 0.10 & 0.31 & 0.14 \\ 0.14 & -0.60 & 0.32 & 0.14 \\ 0.14 & 0.32 & -0.60 & 0.14 \\ 0.14 & 0.31 & 0.10 & -0.55 \end{pmatrix}$$

شکل ۱، رویه‌های طرح عددی رابطه ۵۱ را روی ناحیه  $[-8, 8] \times [0, 1]$  که با انتخاب  $N_g = 1000$  و  $M = 500$  گسسته‌سازی شده‌اند، نشان می‌دهد. رفتار هموار و سازگار این رویه‌ها در تعداد حالت اقتصادی زیاد، نشان دهنده کارایی این طرح عددی است.



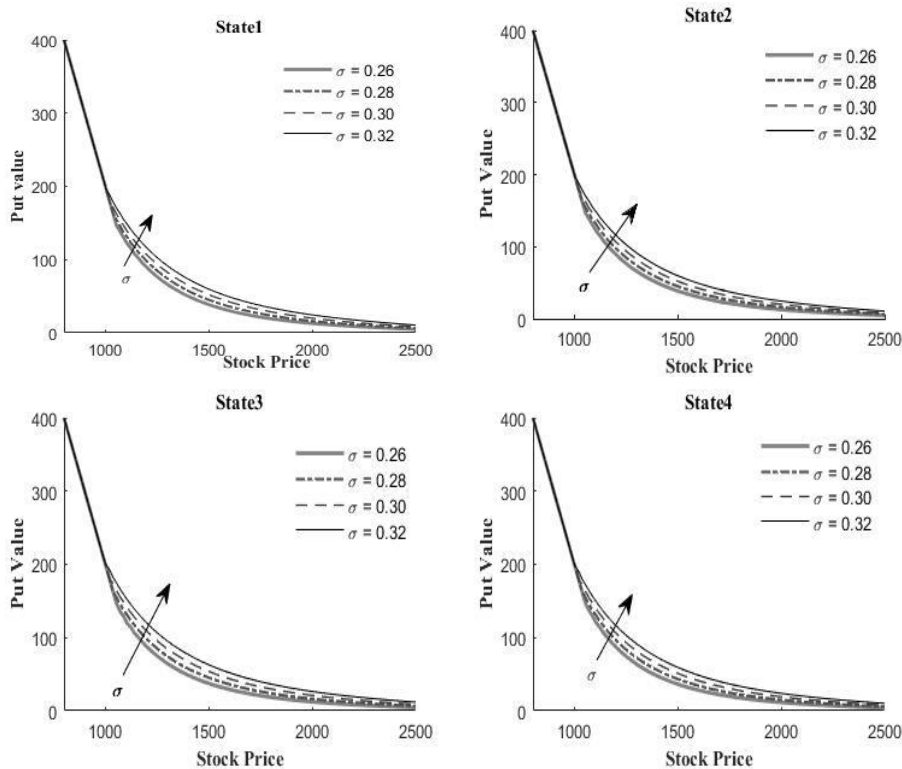
شکل ۱. رویه‌های ارزش اختیار فروش آمریکایی طرح عددی رابطه ۵۱.

در جدول ۱، نیز نتایج به دست آمده نشان گر پایداری این طرح عددی برای همه حالت‌ها است. به طوری که نتایج عددی نشان می‌دهند، ارزش اختیار در چهار حالت با میل همزمان  $\Delta x$  و  $\Delta \tau$  به صفر به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. به دلیل حجم زیاد مطالب ما تنها از نسبت  $\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{1}{2}$  استفاده کردیم. برای سایر نسبت‌های ممکن نیز این همگرایی برقرار است. با توجه به مشاهداتی که از داده‌های قراردادهای اختیار می‌توان مشاهده کرد، این انتظار وجود دارد که ارزش اختیار آمریکایی با افزایش پارامتر ریسکی آن افزایش یابد. این ویژگی را می‌توان به صورت تئوری در مقاله مرتون (۱۹۷۳) دید. در این مقاله تحت قضیه‌ای نشان داده شده است که قیمت قرارداد اختیار تابعی نازولی از پارامتر ریسک دارایی پایه است.

جدول ۱. جدول همگرایی روش تفاضل متناهی همزمان با افزایش مقادیر  $M$  و  $N_g$ .

ارزش اختیار	$M = 250$ $N_g = 125$	$M = 500$ $N_g = 250$	$M = 1000$ $N_g = 500$	$M = 2000$ $N_g = 1000$	$M = 4000$ $N_g = 2000$
حالت ۱	۴۵/۲۲	۴۵/۰۶	۴۵/۲۸	۴۵/۲۶	۴۵/۲۷
حالت ۲	۴۶/۲۵	۴۵/۰۹	۴۵/۳۲	۴۵/۳۰	۴۵/۳۰
حالت ۳	۴۹/۳۹	۴۸/۰۰	۴۸/۴۱	۴۸/۲۲	۴۸/۲۲
حالت ۴	۴۴/۱۰	۴۳/۴۵	۴۳/۶۴	۴۳/۶۲	۴۳/۶۳

براین اساس ما در شکل ۲، نشان می دهیم این ویژگی برای مدل واریانس گامی رژیم نیز برقرار است.



شکل ۲. نمودارهای ارزش اختیار روی دامنه قیمت اولیه برای مقادیر  $0.26, 0.28, 0.30$  و  $0.32$ .

### نتیجه گیری و پیشنهادها

هدف تئوری قیمت گذاری اوراق مشتقه پیشنهاد یک قیمت عادلانه براساس ویژگی های بازار دارایی پایه است. براین اساس، انتخاب یک مدل تصادفی سازگارتر با ویژگی های بازار نقش

به‌سزایی در استفاده از این تئوری دارد. مدل حرکت برآونی هندسی مدل شده با زنجیر مارکف که توسط خلیق و لیو (۲۰۰۹) برای قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار آمریکایی به‌کار گرفته شده است دارای بازده‌هایی با تابع چگالی نسبت به زمان ناهمگن است که این ویژگی را می‌توان در داده‌های واقعی بازار نیز مشاهده کرد، اما همچنان این ضعف برای مدل برآونی هندسی وجود دارد که چولگی صفر در برابر چولگی وابسته به پارامترهای  $\theta$ ،  $\nu$  و هم‌علامت با علامت پارامتر  $\theta$  و کشیدگی با مقدار ۳ در مقابل کشیدگی با مقدار  $3(1+\nu)$  برای فرآیند واریانس گامای که در پژوهش هیرسا و مدن (۲۰۰۴) برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی به‌کار گرفته شده است را دارا است. در نقطه مقابل فرآیند واریانس گاما (درکل فرآیندهای لوی) توانایی توصیف ویژگی ساختاری بازارهای مالی چه به صورت آماری و چه در قیمت‌گذاری ریسک خنثی را ندارد. تفاوت این دو مدل در قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی را به وضوح می‌توان در تقریب مرز آزاد این مسئله مشاهده کرد، یافته‌های پژوهش هیرسا و مدن (۲۰۰۴) نشان می‌دهد که مدل واریانس گاما مرز اجرای زودرس بالاتری برای اختیار فروش آمریکایی که در نتیجه آن قیمت پایین‌تری نسبت به مدل برآونی هندسی برای داده‌های مشخصی از بازار ارزیابی می‌کند. اما باید توجه کرد که در مدل برآونی هندسی مدل شده با زنجیر مارکف با توجه به شرط اولیه  $\alpha_i = e_j$ ، مرز اجرای زودرس و قیمت متناسب به آن برای اختیار آمریکایی تقریب زده می‌شود. در این پژوهش سعی بر آن بوده تا با انتخاب مدل واریانس گاما مدل شده با زنجیر مارکف برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی، سازگاری هرچه بیشتری با واقعیت بازار که نتیجه آن معرفی یک قیمت منصفانه در تئوری یاد شده است داشته باشیم.

در این مقاله ما به معرفی یک PIDEs برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل واریانس گاما مدل شده با زنجیر مارکف پرداخته‌ایم و از روش تفاضل متناهی برای حل این معادله استفاده کرده‌ایم. به منظور غلبه بر مرز آزاد معادله اختیار آمریکایی از فرآیند سود تقسیمی و برای رفع مشکل تکینگی اندازه پرش مدل مسئله از تکنیک‌های عددی استفاده کرده‌ایم. نتایج عددی ارائه شده، حاکی از تطابق الگوریتم معرفی شده با اصول تئوری مالی و آنالیز عددی است. به‌یافت معرفی شده قابل تعمیم برای قیمت‌گذاری سایر قراردادهای مالی از جمله اختیار اروپایی و آسیایی و برخی دیگر از مسائل در حوزه ریاضیات مالی همانند ریسک اعتباری (احتمال نکول شرکت‌ها) نیز خواهد بود.

## References

- Bastani, A. F., Ahmadi, Z., & Damircheli, D. (2013). A Radial Basis Collocation Method for Pricing American Options under Regime-

switching Jump-diffusion Models. *Applied Numerical Mathematics*, 65, 79-90.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Bouchard, B., & Warin, X. (2012). Monte-carlo Valuation of American Options: Facts and New Algorithms to Improve Existing Methods. In *Numerical Methods in Finance*, Springer, Berlin, Heidelberg, 12(1), 215-255.

Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1978). Corporate Income Taxes, Valuation, and the Problem of Optimal Capital Structure. *Journal of Business*, 51(1), 103-114.

Cai, N., & Kou, S. (2012). Pricing Asian Options under a Hyper-exponential Jump Diffusion Model. *Operations Research*, 60(1), 64-77.

Carr, P. (1998). Randomization and the American Put. *The Review of Financial Studies*, 11(3), 597-626.

Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., & Yor, M. (2002). The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *The Journal of Business*, 75(2), 305-332.

Carr, P., Jarrow, R., & Myneni, R. (1992). Alternative Characterizations of American Put Options. *Mathematical Finance*, 2(2), 87-106.

Clark, P. K. (1973). A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices. *Econometrica. journal of the Econometric Society*, 135-155.

Cont, R., & Tankov, P. (2003). *Financial modelling with jump processes* (Vol. 2). CRC press.

Elliott, R. J., & Osakwe, C. J. U. (2006). Option Pricing for Pure Jump Processes with Markov Switching Compensators. *Finance and Stochastics*, 10(2), 250-275.

Elliott, R. J., & Siu, T. K. (2013). Option Pricing and Filtering with Hidden Markov-modulated Pure-jump Processes. *Applied Mathematical Finance*, 20(1), 1-25.

- Elliott, R. J., Chan, L., & Siu, T. K. (2006). Risk Measures for Derivatives with Markov-modulated Pure Jump Processes. *Asia-pacific Financial Markets*, 13(2), 129-149.
- Gukhal, C. R. (2001). Analytical Valuation of American Options on Jump-diffusion Processes. *Mathematical Finance*, 11(1), 97-115.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Hirsa, A., & Madan, D. B. (2004). Pricing American Options under Variance Gamma. *Journal of Computational Finance*, 7(2), 63-80.
- Jaimungal, S., & Surkov, V. (2011). Levy-based Cross-commodity Models and Derivative Valuation. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1), 464-487.
- Jiang, L., & Dai, M. (2004). Convergence of Binomial Tree Methods for European/american path-dependent options. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(3), 1094-1109.
- Khaliq, A. Q., & Liu, R. H. (2009). New Numerical Scheme for Pricing American Option with Regime-switching. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12(03), 319-340.
- Konikov, M., & Madan, D. B. (2002). Option Pricing Using Variance Gamma Markov Chains. *Review of Derivatives Research*, 5(1), 81-115.
- Kwon, Y., & Lee, Y. (2011). A Second-order Finite Difference Method for Option Pricing under Jump-diffusion Models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(6), 2598-2617.
- Lee, Y. (2014). Financial Options Pricing with Regime-switching Jump-diffusions. *Computers & Mathematics with Applications*, 68(3), 392-404.
- Madan, D. B., Carr, P. P., & Chang, E. C. (1998). The Variance Gamma Process and Option Pricing. *Review of Finance*, 2(1), 79-105.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141-183.



- Merton, R. C. (1976). Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144.
- Nielsen, B. F., Skavhaug, O., & Tveito, A. (2002). Penalty and Front-fixing Methods for the Numerical Solution of American Option Problems. *Journal of Computational Finance*, 5(4), 69-98.
- Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.